

EXERCICE 1 : FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE PARTIE.

Pour toute partie A d'un ensemble non vide E , la *fonction caractéristique* de A - notée χ_A - est

la fonction ainsi définie : $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

- L'ensemble de définition de χ_A est sous-entendu : quel est-il ?
Proposer un ensemble d'arrivée pour χ_A .
- Déterminer χ_\emptyset et χ_E .
- On suppose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{2, 3, 5\}$. χ_A est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- De façon générale, quelles conditions faut-il imposer à E et A pour que χ_A soit injective, surjective, bijective ?
- On suppose ici $E = \mathbb{R}$. Représenter graphiquement χ_A dans chacun des cas suivants :
 $A = [-2, 1]$; $A = [3, 5[$; $A =]-2, 1]$; $A =]3, 5[$; $A =]-2, 1] \cup [3, 5[$; $A = \mathbb{Z}$
A quelle famille de fonctions peut-on rattacher χ_A dans ces six cas ?
A quoi ressemble la représentation graphique de $\chi_{\mathbb{Q}}$?
- Dans cette question, A et B désignent deux parties quelconques d'un ensemble E non vide.
 - Démontrer : $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$ (*indication* : raisonner selon que $x \in A$ ou que $x \notin A$).
En déduire : $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$.
 - Démontrer : $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$ et $\chi_{AB} = \chi_A \chi_B$.
A l'aide des lois de Morgan, en déduire : $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.
 - Calculer de la même façon $\chi_{A \setminus B}$ et $\chi_{A * B}$ en fonction de χ_A et χ_B (* désigne la différence symétrique : cf. DM1).
 - En utilisant les résultats obtenus en a. et en c. , redémontrer l'associativité de la différence symétrique par un simple calcul.
- Montrer que toute application de E dans $\{0, 1\}$ peut être considérée comme la fonction indicatrice d'une partie de E dont on donnera une définition en compréhension.
A l'aide de 6.a, en déduire que la relation entre une partie de E et sa fonction caractéristique est une bijection entre deux ensembles que l'on précisera.

EXERCICE 2 : ARRONDI ENTIER D'UN REEL.

La partie entière d'un réel est une approximation de ce réel par le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel. Ce n'est donc pas toujours l'entier le plus proche de ce réel.

- Donner un exemple confirmant la précédente affirmation.
- Donner un exemple montrant que l'expression *l'entier le plus proche* est parfois ambiguë. C'est pour lever cette ambiguïté que l'on a instauré la règle dite *de l'arrondi*.
- Selon cette règle, quel est l'ensemble des réels dont l'arrondi (entier) est 3 ?
Soit x un réel et n son arrondi entier, noté aussi $\text{Arr}(x)$.
- Déterminer un encadrement de x caractérisant n comme arrondi de x .
En déduire : $\text{Arr}(x) = \text{Ent}(x + 1/2)$ et calculer les arrondis de $2,3; 3,5; -4,7; -6,5; \pi; -\sqrt{5}$.
Que peut-on dire concernant les représentations graphiques de Arr et de Ent ?
A quel type de fonction se rattache Arr ?
- Représenter graphiquement la fonction Arr sur l'intervalle $[-3; 3,5]$.
- La fonction Arr est-elle paire ? impaire ?