

EXERCICE 1 : DIFFERENCE SYMETRIQUE DE DEUX PARTIES.

Pour toutes parties A et B d'un ensemble E , on pose : $A * B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.

- $A * B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \stackrel{\text{commut.}}{=} (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \stackrel{\text{déf.}}{=} \boxed{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$
- $A * B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \stackrel{\text{distributivité de } \cup}{\text{par rapport à } \cap} = (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{A}) \cap (\bar{B} \cup B)$, et donc
 $A * B \stackrel{\text{propriétés}}{=} E \cap (A \cup B) \cap (\bar{B} \cap \bar{A}) \cap E \stackrel{\text{comm.}}{=} (A \cup B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) \stackrel{\text{déf.}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ **CQFD**
- Par définition (ou aussi d'après ce qui précède), $A * B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'une des deux parties A et B sans appartenir à l'autre.

4. Représentations de $A * B$: voir fig. 1 page suivante.

5. En utilisant (par exemple) l'expression de $A * B$ obtenue à la question 2 :

$$A * \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = \boxed{A} ; A * E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \boxed{\bar{A}}$$

$$A * A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \boxed{\emptyset} ; A * \bar{A} = (A \cup \bar{A}) \setminus (A \cap \bar{A}) = E \setminus \emptyset = \boxed{E}$$

- $A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \stackrel{\text{comm. de}}{\cup \text{ et } \cap} = (B \cup A) \setminus (B \cap A) \stackrel{2.}{=} B * A$; donc $*$ est commutative **CQFD**

7. En utilisant deux fois la définition de l'opération $*$:

$$(A * B) * C = (A * B) \bar{C} \cup \overline{A * B C} = (\bar{A} \bar{B} \cup \bar{A} B) \bar{C} \cup \overline{\bar{A} B C \cup A \bar{B} C}$$

Puis en utilisant les propriétés des opérations ensemblistes :

$$(A * B) * C = (\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C}) \cup (\overline{\bar{A} B \bar{A} B}) C = (\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C}) \cup (A \cup \bar{B}) (\bar{A} \cup B) C$$

$$(A * B) * C = (\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C}) \cup (\bar{A} \bar{A} \cup \bar{A} B \cup \bar{B} \bar{A} \cup \bar{B} B) C = (\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C}) \cup (\emptyset \cup \bar{A} B \cup \bar{B} \bar{A} \cup \emptyset) C$$

$$(A * B) * C = (\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C}) \cup (\bar{A} B \cup \bar{B} \bar{A}) C = (\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C}) \cup (\bar{A} B C \cup \bar{B} \bar{A} C)$$

$$(A * B) * C = \bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} B C \cup \bar{B} \bar{A} C = \bar{A} B C \cup \bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{B} \bar{A} C$$
 CQFD

En remplaçant A , B et C respectivement par B , C et A on obtiendrait de la même façon :

$$(B * C) * A = B C A \cup B \bar{C} \bar{A} \cup \bar{B} C \bar{A} \cup \bar{B} \bar{C} A ; \text{ or, grâce à la commutativité de } \cap :$$

$$\bar{A} B C \cup \bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{B} \bar{A} C = B C A \cup B \bar{C} \bar{A} \cup \bar{B} C \bar{A} \cup \bar{B} \bar{C} A, \text{ donc } (A * B) * C = (B * C) * A.$$

Mais, par commutativité de $*$: $(B * C) * A = A * (B * C)$ donc $(A * B) * C = A * (B * C)$ ce qui signifie que $*$ est associative **CQFD**

- $*$ est commutative et associative : on peut donc calculer la différence symétrique de deux parties ou plus dans n'importe quel ordre.
- Des questions 8 et 9 résulte que $A * B * C$ est constituée des éléments qui appartiennent soit à chacune des trois parties A , B et C soit à l'une des trois parties A , B et C sans appartenir aux deux autres. Voir fig. 2 page suivante.

$$10. A * B * C = \bar{A} B C \cup \bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C = \{1, 5\} \cup \{10\} \cup \{8\} \cup \{9\} = \boxed{\{1, 5, 7, 8, 9, 10\}}$$

$$11. A * X = B \Rightarrow A * (A * X) = A * B \Rightarrow (A * A) * X = A * B \Rightarrow \emptyset * X = A * B \Rightarrow X = A * B$$

Donc, s'il y a une solution, elle est unique et égale à $A * B$. Vérifions qu'elle convient !

$$X = A * B \Rightarrow A * X = A * (A * B) = (A * A) * B = \emptyset * B = B$$
 CQFD

EXERCICE 2 : UNE FONCTION AFFINE PAR MORCEAUX.

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = |x-3| + \sqrt{(x+4)^2}$.

1. Pour tout réel A : $\sqrt{A^2} = |A|$ donc $f(x) = |x-3| + |x+4|$.

Cherchons à exprimer $f(x)$ sans valeurs absolues :

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$ x-3 $	$3-x$	7	$3-x$	0	$x-3$
$ x+4 $	$-x-4$	0	$x+4$	7	$x+4$
$f(x)$	$-2x-1$	7	7	7	$2x+1$
Var. de f	$+\infty$ ↘	7	→	7	↗ $+\infty$

D_f , ensemble de définition de f , égal à \mathbb{R} , est la réunion de trois intervalles sur chacun desquels f est affine : f est donc une fonction affine par morceaux **CQFD**

2. A l'aide des résultats obtenus à la question 1 : $f(x) = \text{Max}(|2x+1|, 7)$

3. Représentation graphique de f : voir fig. 3 ci-dessous.

4. Il semble que la droite $\Delta : x = -1/2$ soit axe de symétrie de la courbe (C) représentant f .

Pour le prouver, il suffit de montrer que pour tout x de D_f : $f(2 \times (-1/2) - x) = f(x)$ ie $f(-1-x) = f(x)$. Or $f(x) = |x-3| + |x+4|$ donc $f(-1-x) = |-1-x-3| + |-1-x+4|$ soit $f(-1-x) = |-x-4| + |-x+3| = |-(x+4)| + |-(x-3)| = |x+4| + |x-3| = f(x)$ **CQFD**

