

*Le sujet comporte 4 exercices indépendants entre eux.*

*Il sera tenu compte de la présentation et de la qualité de l'argumentation.*

*La feuille annexe (pages 5 et 6) est à joindre à la copie.*

**EXERCICE 1 : SOMME DES INVERSES DES COEFFICIENTS BINOMIAUX DE CHACUNE DES LIGNES DU TRIANGLE DE PASCAL.**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$ .

1. Recherche de la nature de la suite  $u$ .

a. Calculer les 7 premiers termes de  $u$  et conjecturer quant à la nature de  $u$ .

b. En supposant connu que lorsque  $n \geq 6$  :  $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{3}$  pour tout  $k$  compris entre 3 et  $n-3$ ,

montrer que  $\forall n \geq 6 : 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$ .

c. Conclure quant à la nature de  $u$  et proposer un équivalent pour  $u_n - 2$ .

2. Relation de récurrence  $\mathcal{P}_n : u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}u_n$ .

On se propose de démontrer (sans récurrence) que  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout naturel  $n$ .

a. Démontrer  $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$ , puis  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}u_n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^{-1}$ .

b. Justifier par un argument simple :  $\sum_{k=0}^n (n-k)k!(n-k)! = \sum_{k=0}^n k(n-k)!k!$ .

c. Démontrer :  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (n-k)k!(n-k)! = \sum_{k=0}^n k(n-k)!k!$

d. En déduire que  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

e. Recalculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  à l'aide de  $\mathcal{P}_n$ .

f. Compléter en annexe 1 la FONCTION Un qui, pour un  $n$  donné, effectue le calcul de  $u_n$  selon la récurrence  $\mathcal{P}_n$ .

g. Grâce à  $\mathcal{P}_n$ , montrer qu'au-delà du rang 4, la suite  $u$  est décroissante.

3. Recherche d'une formule explicite.

On considère la suite auxiliaire :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2^n}{n+1}u_n$ .

a. Démontrer :  $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n = \frac{2^{n+1}}{n+2}$ .

b. En déduire, par le calcul de  $\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left( \frac{2^{n+1}}{n+1} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}$ .

**EXERCICE 2** : ÉTUDE DE L'INTÉGRALE  $I(p, q) = \int_0^1 \binom{p+q}{p} t^p (1-t)^q dt, (p, q) \in \mathbb{N}^2$ .

NB : on convient par continuité :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$ .

1. Justifier l'existence de  $I(p, q)$  pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .
2. Calculer  $I(p, 0)$  et  $I(0, q)$ . Dans quelles conditions a-t-on  $I(p, 0) = I(0, q)$  ?
3. Calculer, pour tout entier naturel  $n$  :  $\sum_{k=0}^n I(k, n-k)$ .
4. A l'aide d'un changement de variable, démontrer :  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I(p, q) = I(q, p)$ .
5. a. Via une intégration par parties, établir :  $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, I(p, q) = I(p+1, q-1)$ .  
b. En déduire  $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, I(p, q) = 1/(p+q+1)$ .  
c. Retrouver ainsi les résultats obtenus aux questions 3 et 4.
6. a. Justifier :  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ .  
b. Pour tout couple  $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , étudier les variations de  $f : t \mapsto t^p (1-t)^q$  sur  $[0, 1]$ .  
c. En déduire :  $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \leq \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$ .

**EXERCICE 3** : ETUDE DE DEUX VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES.

1. On donne en annexe 2 un tableau censé fournir la loi d'une variable aléatoire discrète  $X$ .
  - a. Compléter ce tableau sachant que  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .
  - b. Représenter graphiquement  $F$  dans le quadrillage figurant sous le tableau.
  - c. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de  $X$  en faisant apparaître dans le tableau les calculs intermédiaires.
2. Un sac contient 7 jetons indiscernables au toucher, dont 3 rouges et 4 blancs.
  - a. On extrait les jetons un à un et sans remise.  
Montrer que la variable aléatoire  $Y$ , égale au rang du premier jeton rouge tiré, suit la même loi que la variable aléatoire  $X$  étudiée dans la question 1.
  - b. On extrait les jetons un à un mais avec remise.  
Déterminer la nouvelle loi suivie par la variable aléatoire  $Y$ , ainsi que son espérance et sa variance.
  - c. Compléter en annexe 1 la FONCTION  $Y$  qui simule l'épreuve du a. (on rappelle que  $\text{random}(n)$  renvoie de façon équiprobable l'un quelconque des entiers de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ).
  - d. Quelles modifications apporter à FONCTION  $Y$  de façon à simuler l'épreuve du b. ?

**EXERCICE 4 : SUITE DÉFINIE PAR UNE RÉCURRENCE LINÉAIRE D'ORDRE 3.**

Soit la suite  $u$  définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 3$  et  $\forall n \geq 3 : u_n = 6u_{n-1} - 11u_{n-2} + 6u_{n-3}$ .

1. Calculer  $u_3$  et  $u_4$ . Que peut-on conjecturer concernant la suite  $u$  ?

On se propose de déterminer une expression explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

On va utiliser pour cela le calcul matriciel.

On pose  $M = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

2. Effectuer le produit  $MX_n$  et en déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$ .
3. Expliquer pourquoi la connaissance de la dernière ligne de la matrice  $M^n$  suffit pour parvenir à l'objectif que l'on s'est fixé.

Il ne reste donc plus qu'à déterminer les éléments de la dernière ligne de  $M^n$ , en fonction de  $n$ . C'est ici qu'intervient la matrice  $P$  définie plus haut.

4. Déterminer une matrice diagonale  $D$  telle que  $PM = DP$ .
5. Montrer que  $P$  est inversible en cherchant son inverse.
6. En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P^{-1}D^n P$ .
7. A l'aide de la question 3, en déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \times 3^n - 13 \times 2^n + 10$ .
8. Grâce à la forme explicite de  $u_n$  obtenue en 7 :
  - a. vérifier les valeurs obtenues à la question 1 ;
  - b. montrer que la suite  $u$  est strictement croissante à partir du rang 1 ;
  - c. déterminer la nature de la suite  $u$ .

(page vierge)

**ANNEXE 1 : textes en Pascal à compléter**

EX. 1

```
FUNCTION Un( ..... ) : .....;
VAR .....;
BEGIN
  u := 1 ;
  FOR i := ..... TO ..... DO
    u := .....;
  Un := .....;
END ;
```

EX. 3

```
FUNCTION Y : ..... ; { Y est une fonction sans paramètres }
VAR .....;
BEGIN
  i := ..... ; n := ..... ;
  REPEAT
    i := ..... ; n := ..... ;
  UNTIL random(n) < .....; { on suppose les jetons rouges numérotés
    de 0 à 2, les autres étant numérotés à partir de 3 }
  Y := i ;
END ;
```

**ANNEXE 2 : Variable aléatoire  $X$  de l'exercice 3**

$k$	1	2	3	4	5	totaux
$P(X = k)$	$3/7$		$6/35$	$3/35$		
$F(k)$		$5/7$				

