**EXERCICE 1 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$.

1. <u>Recherche de la nature de la suite $u$.</u>

a. $\boxed{(u_0,u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6) = (1,2,5/2,8/3,8/3,13/5,151/60)}$.

On constate que $u$ est croissante jusqu'au rang 4 puis décroissante ; <u>si elle demeure décroissante au-delà du rang 6 et étant minorée par 0, elle convergera</u>.

b. $u_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}$ et si $n \geq 6 : u_n = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}^{-1} + \sum_{k=3}^{n-3}\binom{n}{k}^{-1} + \sum_{k=n-2}^{n}\binom{n}{k}^{-1} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \sum_{k=3}^{n-3}\binom{n}{k}^{-1}$

Or, $\forall k \in [\![3,n-3]\!] : \binom{n}{k} \geq \binom{n}{3} > 0$ donc $0 \leq \sum_{k=3}^{n-3}\binom{n}{k}^{-1} \leq \sum_{k=3}^{n-3}\binom{n}{3}^{-1} = \underbrace{(n-5)}_{\text{nb de termes de la somme}}\frac{6}{n(n-1)(n-2)}$

d'où $\forall n \geq 6 : 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} \leq u_n \leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + \frac{6(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$ **CQFD**

c. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)}\right) = 0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{6(n-5)}{n(n-1)(n-2)}$ d'où (th. gendarmes) : $\boxed{u \text{ converge vers } 2}$.

De la même façon, on établit $\lim_{n\to+\infty}\left[(u_n-2)\Big/\frac{2}{n}\right] = 1$ et donc $\boxed{u_n - 2 \sim \frac{2}{n}}$.

2. <u>Relation de récurrence</u> $\mathcal{P}_n : u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}u_n$.

On se propose de démontrer (sans récurrence) que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout naturel $n$.

a. $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)(n!)}{(k+1)(k!)(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ **CQFD**

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}^{-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}^{-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}\right]^{-1} = 1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(1+k)\binom{n}{k}^{-1} = 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^{-1} = 1 + \frac{1}{n+1}u_n + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^{-1} \text{ **CQFD**}$$

b. Par la symétrie $k \mapsto n-k$ : $\sum_{k=0}^{n}a_k = \sum_{k=0}^{n}a_{n-k}$ (*cf.* règles de manipulation des sommes Σ).

Avec $a_k = (n-k)k!(n-k)!$, on obtient $\sum_{k=0}^{n}(n-k)k!(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}k(n-k)!k!$ **CQFD**

c. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n}{2}-k\right)\frac{k!(n-k)!}{n!} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(n-2k)k!(n-k)! = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\left[(n-k)-k\right]k!(n-k)! = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}(n-k)k!(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}k(n-k)!k!$ **CQFD**

d. D'après b. et c. l'égalité $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}$ est vraie d'où $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n}{2}u_n$ et

avec a. : $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}u_n + \frac{1}{n+1}\times\frac{n}{2}u_n = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}u_n$ ie $\mathcal{P}_n$ est vraie **CQFD**

e. $u_1=1+\dfrac{0+2}{2(0+1)}u_0=1+1\times1=\boxed{2}$ ; $u_2=1+\dfrac{3}{4}u_1=1+\dfrac{3}{2}=\boxed{\dfrac{5}{2}}$ ; $u_3=1+\dfrac{4}{6}u_2=1+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{2}=\boxed{\dfrac{8}{3}}$ **CQFD**

f. *Cf*. annexe 1 pour la FUNCTION Un.

g. Via $\mathcal{P}_n$ : $u_{n+1}-u_n=1+\dfrac{n+2}{2(n+1)}u_n-u_n=\dfrac{n(2-u_n)+2}{2(n+1)}$ ; or, d'après b., si $n\geq 4$ :

$u_n\geq 2+2/n$ donc $n(2-u_n)+2\leq 0$. Donc $u_{n+1}-u_n\leq 0$ et ainsi, au-delà du rang 4, la suite $u$ est décroissante **CQFD** (ce qui confirme, avec 1c., les conjectures du 1a.).

3. Recherche d'une formule explicite. On considère la suite auxiliaire : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\dfrac{2^n}{n+1}u_n$.

a. $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}-v_n=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}u_{n+1}-\dfrac{2^n}{n+1}u_n=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}\left[1+\dfrac{n+2}{2(n+1)}u_n\right]-\dfrac{2^n}{n+1}u_n$, soit :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2^{n+1}}{n+2}+\frac{2^{\cancel{n+1}}}{\cancel{n+2}}\,\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{2}(n+1)}u_n-\frac{2^n}{n+1}u_n=\frac{2^{n+1}}{n+2}\ \textbf{CQFD}$$

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)\underset{\text{-page}}{\overset{\text{télesco-}}{=}}v_n-v_0=\frac{2^n}{n+1}u_n-1$ d'où $\displaystyle\frac{2^{n+1}}{n+1}u_n=2\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)\right)\underset{\text{a.}}{=}2\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{k+1}}{k+2}\right)$

donc $\displaystyle\frac{2^{n+1}}{n+1}u_n=2\left(\frac{2^{1-1}}{1}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2^{k-1}}{k}\right)=2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ d'où $\displaystyle u_n=\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$ **CQFD**

## $\boxed{\text{EXERCICE 2}}$ : ÉTUDE DE L'INTÉGRALE $I(p,q)=\displaystyle\int_0^1\binom{p+q}{p}t^p(1-t)^q\,dt,\ (p,q)\in\mathbb{N}^2$.

1. $\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2, g:t\mapsto\dbinom{p+q}{p}t^p(1-t)^q$ est un polynôme donc $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ (*NB* : si $p=0$ ou $q=0$, on tient compte de la convention de prolongement par continuité en 0). $g$ est donc intégrable entre 0 et 1 et l'intégrale $I(p,q)$ est bien définie **CQFD**

2. $\boxed{I(p,0)}=\displaystyle\int_0^1\binom{p}{p}t^p(1-t)^0\,dt=\int_0^1 t^p dt=\left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_{t=0}^{t=1}=\boxed{\frac{1}{p+1}}$ (*NB* : $0^{p+1}=0$ car $p+1\neq 0$ ).

$\boxed{I(0,q)}=\displaystyle\int_0^1\binom{q}{0}t^0(1-t)^q\,dt=\int_0^1(1-t)^q\,dt=\left[-\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}\right]_{t=0}^{t=1}=\boxed{\frac{1}{q+1}}$ (*NB* : $0^{q+1}=0$ aussi).

Donc : $\boxed{I(p,0)=I(0,q)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{p+1}=\dfrac{1}{q+1}\Leftrightarrow p+1=q+1\boxed{\Leftrightarrow p=q}$

3. $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\displaystyle\sum_{k=0}^{n}I(k,n-k)=}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^1\binom{k+n-k}{k}t^k(1-t)^{n-k}\,dt\right]=\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right]dt$ d'où

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}I(k,n-k)\underset{\substack{\text{formule}\\\text{du binôme}}}{=}\int_0^1[t+(1-t)]^n\,dt=\int_0^1 1dt=[t]_{t=0}^{t=1}=1-0=\boxed{1}$

4. L'objectif $I(p,q)=I(q,p)$ conduit à "échanger" les rôles de $t$ et $1-t$, d'où si $t=1-u$ :

$I(p,q)=\displaystyle\int_{u=1-0}^{u=1-1}\binom{p+q}{p}(1-u)^p u^q(-du)=-\int_1^0\binom{p+q}{(p+q)-p}(1-u)^p u^q du$ et donc

$$I(p,q)=\int_0^1 \binom{q+p}{q} u^q(1-u)^p\,du = I(q,p)\ \textbf{CQFD}$$

5. a. L'objectif $I(p,q)=I(p+1,q-1)$ conduit à envisager de hausser de 1 le degré de $t^p$ et baisser de 1 celui de $(1-t)^q$ ce qui est possible si $q \geq 1$. D'où $\forall (p,q)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ en posant $u(t)=\binom{p+q}{p}\dfrac{t^{p+1}}{p+1}$ et $v(t)=(1-t)^q$, on obtient $u$ et $v$ de classe $C^1$ sur $[0,1]$ (en tant que polynômes) et on peut intégrer par parties : $\int_0^1 u'v(t)dt=[uv(t)]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1 uv'(t)dt$, ie

$$I(p,q)=\left[\binom{p+q}{p}\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_{t=0}^{t=1}-\int_0^1\binom{p+q}{p}\frac{t^{p+1}}{p+1}\left[-q(1-t)^{q-1}\right]dt\text{, donc :}$$

$$I(p,q)=[0-0]+\int_0^1\frac{q}{p+1}\binom{p+q}{p}t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt=\int_0^1\frac{q}{p+1}\frac{(p+q)!}{p!q!}t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt\text{, donc :}$$

$$I(p,q)=\int_0^1\frac{(p+1+q-1)!}{(p+1)!(q-1)!}t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt=\int_0^1\binom{p+1+q-1}{p+1}t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt=I(p+1,q-1)\ \textbf{CQFD}$$

b. D'après a. : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, I(p,q)=I(p+1,q-1)$ donc par récurrence décroissante finie sur $q$ : $I(p,q)=I(p+q,q-q)=I(p+q,0)\underset{cf\,2.}{=}1/(p+q+1)$. C'est encore vrai si $q=0$ (d'après 2. également), donc finalement : $\forall (p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, I(p,q)=1/(p+q+1)$ **CQFD**

c. $\sum_{k=0}^{n} I(k,n-k)\underset{cf.\,\text{b.}}{=}\sum_{k=0}^{n}1/(k+(n-k)+1)=\sum_{k=0}^{n}1/(n+1)=(n+1)\times 1/(n+1)=1$ **CQFD**

De plus : $I(p,q)\underset{cf.\,\text{b.}}{=}1/(p+q+1)$ et $I(q,p)\underset{cf.\,\text{b.}}{=}1/(q+p+1)$ donc $I(p,q)=I(q,p)$ **CQFD**

6. a. $\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, I(p,q)=\int_0^1\binom{p+q}{p}t^p(1-t)^q\,dt$ donc $\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt=\binom{p+q}{p}^{-1}I(p,q)$

d'où $\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt\underset{cf.\,5\text{b.}}{=}\binom{p+q}{p}^{-1}\dfrac{1}{p+q+1}=\dfrac{p!q!}{(p+q)!}\dfrac{1}{p+q+1}=\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$ **CQFD**

b. $\boxed{\forall (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ : $f'(t)=pt^{p-1}(1-t)^q-qt^p(1-t)^{q-1}=t^{p-1}(1-t)^{q-1}\left[p-(p+q)t\right]$; or, sur $]0,1[$ : $t^{p-1}(1-t)^{q-1}>0$ donc $f'$ y a le même signe que $t\mapsto p-(p+q)t$ qui est affine strictement décroissante (car $-(p+q)<0$) et s'annule en $\boxed{\alpha=p/(p+q)}$ ( $0<\alpha<1$ car $p>0$ et $q>0$). Ainsi, $f'>0$ sur $]0,\alpha[$ et $f'<0$ sur $]\alpha,1[$ et compte tenu que $f$ est continue sur l'intervalle fermé $[0,1]$ (donc en 0, en $\alpha$ et en 1) on obtient finalement :

$$\boxed{\forall (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ f \text{ strictement croissante sur } [0,\alpha] \text{ et strictement décroissante sur } [\alpha,1]}$$

c. D'après b.: $\forall (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et sur $[0,1]$ : $f\leq f(\alpha)$ d'où par une inégalité de la moyenne $\int_0^1 f(t)dt\leq(1-0)f(\alpha)$. Or, $f(\alpha)=\alpha^p(1-\alpha)^q=\left(\dfrac{p}{p+q}\right)^p\left(\dfrac{q}{p+q}\right)^q=\dfrac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$ donc, avec a. : $\dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}\leq\dfrac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$ inégalité dont on vérifie sans difficulté qu'elle est vraie également pour $p=0$ ou $q=0$, et donc vraie pour tous naturels $p$ et $q$ **CQFD**

## EXERCICE 3 : ETUDE DE DEUX VARIABLES ALEATOIRES

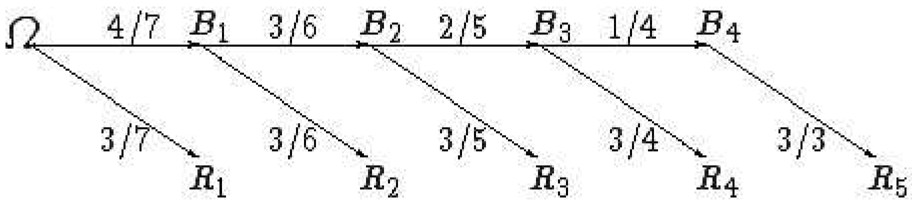
1. a. Voir le tableau complété en annexe 2.
Dans l'ordre : $F(1) = P(X = 1)$ puis $P(X=2)=F(2)-F(1)$ puis total des $P(X = k) = 1$ puis $P(X=5)=1-\left[P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\right]$ et enfin $\forall k\in[\![3,5]\!]$ $F(k)=F(k-1)+P(X=k)$ (*NB* : le total des $F(k)$ n'a pas de sens).

   b. Voir tracé en annexe 2 (*NB* : par commodité, unité en ordonnée = 35 carreaux).

   c. $E(X)$ = total des $kP(X = k)$ donc $\boxed{E(X) = 2}$ .
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ = total des $k^2P(X = k) - E(X)^2$ d'où $\boxed{V(X) = 6/5}$ et $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{6/5}}$.
(*NB* : $k^2P(X = k) = k \times kP(X = k)$ donc on peut calculer : ligne 5 = ligne 4 $\times$ ligne 1)

2. a. $Y(\Omega)=[\![1,5]\!]$, puisqu'avant d'obtenir le 1er jeton rouge il aura fallu tirer de 0 à 4 jetons blancs ; donc on a déjà $Y(\Omega)=X(\Omega)$.
Soit $k\in Y(\Omega)$ ; dire que le 1er jeton rouge est obtenu au *k*ième tirage signifie que l'on a tiré d'abord $k-1$ jetons blancs (notons $B_{k-1}$ cet événement) puis un jeton rouge (notons $R$ cet événement). A l'aide de la formule des probabilités composées où $P(B_{k-1})\neq 0$, et sachant que les jetons sont tirés dans l'ordre("un à un") et sans remise :
$P(Y=k)=P(B_{k-1}R)=P(B_{k-1})P_{B_{k-1}}(R)=\left(A_4^{k-1}\big/A_7^{k-1}\right)\times\left(3\big/\left[7-(k-1)\right]\right)$.
Ainsi : $P(Y=1)=(1/1)\times(3/7)=3/7$ ; $P(Y=2)=(4/7)\times(3/6)=4/7\times1/2=2/7$ ;
$P(Y=3)=(4\times3)/(7\times6)\times(3/5)=2/7\times3/5=6/35$ ;
$P(Y=4)=(4\times3\times2)/(7\times6\times5)\times(3/4)=4/(7\times5)\times3/4=1/35\times3/1=3/35$ ;
$P(Y=5)=(4\times3\times2\times1)/(7\times6\times5\times4)\times(3/3)=1/(7\times5)\times1=1/35$.
Donc : $\forall k\in[\![1,5]\!], P(Y=k)=P(X=k)$ ; de plus : $Y(\Omega)=X(\Omega)$, donc la variable aléatoire $Y$ suit la même loi que la variable aléatoire $X$ **CQFD**

   *NB* : On peut également visualiser la situation à l'aide d'un arbre où $R_k = (Y = k)$ :




   (ce qui illustre bien l'adage selon lequel "*un dessin vaut mieux qu'un long discours*")

   b. On extrait les jetons un à un mais avec remise, auquel cas les tirages peuvent être considérés comme indépendants et de type Bernoulli, avec comme "succès" $R$, de probabilité $p = 3/7$. $Y$ , égale au rang de la 1ère réalisation de $R$, suit donc la loi géométrique de paramètre $p = 3/7$. D'après le formulaire du cours et avec $q = 1 - p$ :
$\boxed{Y(\Omega)=\mathbb{N}^*}$ et $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*, P(Y=k)}=q^{k-1}\times p\boxed{=(4/7)^{k-1}\times3/7}$
De plus : $\boxed{E(X)}=1/p\boxed{=7/3}$ et $\boxed{V(X)}=q/p^2\boxed{=28/9}$

c. Voir annexe 1 pour la FUNCTION Y qui simule l'épreuve du a.
La dernière instruction "Y:= i " révèle la nature de la variable i : c'est le numéro du tirage en cours. Cette instruction est exécutée dès que l'on sort de la boucle REPEAT, ce qui se produira lorsque le test "random(n) < ???" sera vrai, ie lorsqu'on aura tiré un jeton rouge donc de numéro 0, 1 ou 2 : la valeur de "???" est donc 3 et n représente le nombre de jetons disponibles lors du ième tirage. A chaque tirage, i augmente de 1 et parallèlement, n diminue de 1 puisqu'il n'y a pas remise.

d. S'il y a remise, le nombre de jetons reste égal à 7 lors de chacun des tirages : il suffit donc de supprimer la variable n et remplacer random(n) par random(7).

**EXERCICE 4 : SUITE DÉFINIE PAR UNE RÉCURRENCE LINÉAIRE D'ORDRE 3**

Soit la suite $u$ définie par $u_0 = 2,\ u_1 = -1,\ u_2 = 3$ et $\forall n \geq 3 : u_n = 6u_{n-1} - 11u_{n-2} + 6u_{n-3}$.

1. $\boxed{u_3} = 6u_2 - 11u_1 + 6u_0 \boxed{= 41}$ et de même $\boxed{u_4 = 207}$. La suite $u$ est donc décroissante jusqu'au rang 1, puis croissante jusqu'au rang 4 ; au-delà, si la croissance se poursuit et avec l'accélération observée, il est loisible de conjecturer que $\boxed{u \text{ divergerait vers } +\infty}$.

2. $$\boxed{MX_n} = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \boxed{= X_{n+1}}.$$

   $M^0 = I_3$ (matrice unité d'ordre 3) donc $M^0 X_0 = X_0$ et donc $X_n = M^n X_0$ vraie si $n = 0$.
   Soit $n \geq 0$ ; $X_n = M^n X_0 \Rightarrow MX_n = M\left(M^n X_0\right) \Rightarrow X_{n+1} = \left(M \times M^n\right) X_0 \Rightarrow X_{n+1} = M^{n+1} X_0$
   donc, selon le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$ **CQFD**

3. $u_n$ est le 3$^{e}$ élément du vecteur colonne $X_n$ ; or $X_n = M^n X_0$ donc $u_n$ s'obtient comme produit de la 3$^{e}$ (et dernière) ligne de $M^n$ par l'unique colonne de $X_0$. Comme $M$ est une matrice constante (indépendante de $u$), sa puissance $n$ième ne dépend que de $n$ ; de plus, le vecteur $X_0$ est lui aussi constant. Donc la dernière ligne de $M^n$ permettra d'obtenir une expression de $u_n$ ne dépendant que de $n$ ie une expression explicite de $u_n$ **CQFD**.

4. Une matrice diagonale est carrée par définition ; sachant que $P$ est-elle-même carrée et d'ordre 3, le produit $DP$ n'est possible que si $D$ est d'ordre 3 également, donc on est amené à déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que :
   $$PM = DP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -5a & 6a \\ b & -4b & 3b \\ c & -3c & 2c \end{pmatrix}$$
   D'où $(a,b,c) = (1,2,3)$ et $\boxed{D \text{ est la matrice diagonale d'ordre 3, de diagonale : } (1,2,3)}$.

5. On dispose côte à côte et en un seul tableau les matrices $P$ et $I_3$ et on applique la méthode de Gauss-Jordan à ce tableau ; si l'on ne rencontre aucun pivot nul, c'est que $P$ est inversible et on récupère en fin de calculs un tableau comportant côte à côte $I_3$ et $\boxed{P^{-1}}$ .

C'est le cas ici avec la matrice $P$ proposée :

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\!\!\right] \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1\,;\,L_3\leftarrow L_3-L_1}{\left[\!\!\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\!\!\right]} \underset{L_1\leftarrow L_1+5L_2\,;\,L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\left[\!\!\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -9 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]\!\!\right]} \underset{L_3\leftarrow L_3/2;L_1\leftarrow L_1+9L_3;L_2\leftarrow L_2+3L_3}{\left[\!\!\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -4 & 9/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right]\!\!\right]}$$

6. $M^0 = I_3$ et $P^{-1}D^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$ donc $M^n = P^{-1}D^nP$ est vraie pour $n = 0$ ; vraie aussi pour $n = 1$ car $PM = DP$ et $P$ inversible $\Rightarrow P^{-1}PM = P^{-1}DP \Rightarrow M \overset{(*)}{=} P^{-1}DP$

Soit $n \geq 0$ ; $M^n = P^{-1}D^nP \Rightarrow M^nM \overset{(*)}{=} P^{-1}D^nPP^{-1}DP = P^{-1}D^nDP = P^{-1}D^{n+1}P$

Donc, selon le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P^{-1}D^nP$ **CQFD**

7. $D$ est la matrice diagonale (1,2,3) donc $D^n$ est la matrice diagonale ($1^n$,$2^n$,$3^n$) ; de plus, $M^n = P^{-1}D^nP$ et (*cf.* 3.) $u_n$ est la 3e ligne de $M^nX_0$ donc de $P^{-1}D^nPX_0$ ; d'après les règles de calcul du produit matriciel, il suffit alors de ne considérer que la 3e ligne de $P^{-1}$ :

$$u_n = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$u_n = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 13\times 2^n \\ 10\times 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}20 - 13\times 2^n + \frac{1}{2}10\times 3^n = 5\times 3^n - 13\times 2^n + 10 \quad \textbf{CQFD}$$

8. a. $u_3 = 5\times 3^3 - 13\times 2^3 + 10 = 5\times 27 - 13\times 8 + 10 = 135 - 104 + 10 = 31 + 10 = 41$ ; de même :
$u_4 = 5\times 81 - 13\times 16 + 10 = 405 - 208 + 10 = 415 - 208 = 207$ **CQFD**

b. $u_{n+1} - u_n = \left(5\times 3^{n+1} - 13\times 2^{n+1} + 10\right) - \left(5\times 3^n - 13\times 2^n + 10\right) = 5\times\left(3^{n+1} - 3^n\right) - 13\times\left(2^{n+1} - 2^n\right)$

$u_{n+1} - u_n = 5\times 3^n(3-1) - 13\times 2^n(2-1) = 10\times 3^n - 13\times 2^n = 30\times 3^{n-1} - 26\times 2^{n-1}$

donc $u_{n+1} - u_n > 26\times 3^{n-1} - 26\times 2^{n-1} \geq 26\times\left(3^{n-1} - 2^{n-1}\right)$.

Or, $\forall \alpha \geq 0 : 3^\alpha \geq 2^\alpha$ donc $\forall n \geq 1 : u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi, la suite $u$ est strictement croissante à partir du rang 1 **CQFD**

c. $u_n = 5\times 3^n - 13\times 2^n + 10$ ; or $10 = \circ\left(3^n\right)$ et $2^n \overset{0<2<3}{=} \circ\left(3^n\right)$ donc $u_n \sim 5\times 3^n$. Comme $3 > 1$ et $5 > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\times 3^n = +\infty$ et donc $\boxed{\lim u = +\infty}$

(*NB* : ce résultat et celui du b. confirment les conjectures émises à la question 1.)

**ANNEXE 1 : textes en Pascal à compléter**

EX. 1

```
FUNCTION Un( [n : integer] ) :[real];

VAR [i : integer ; u : real];

BEGIN

u := 1 ;

FOR i := [1] TO [n] DO

u := [1 + (i +2)*u/(2*(i + 1))] ;

Un := [u] ;

END ;
```

EX. 3

```
FUNCTION Y : [real] ; {Y est une function sans paramètres}

VAR [i,n : integer] ;

BEGIN

i := 0 ; n := [8] ;

REPEAT

i := [i + 1] ; n := [n – 1] ;

UNTIL random(n) < [3] ; {on suppose les jetons rouges numérotés
        de 0 à 2, les autres étant numérotés à partir de 3 }

Y := i ;

END ;
```

**ANNEXE 2 : Variable aléatoire *X* de l'exercice 3**

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | totaux |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = k)$ | 3/7 | 2/7 | 6/35 | 3/35 | 1/35 | 1 |
| $F(k)$ | 3/7 | 5/7 | 31/35 | 34/35 | 1 | |
| $kP(X = k)$ | 3/7 | 4/7 | 18/35 | 12/35 | 1/7 | 2 |
| $k^2P(X = k)$ | 3/7 | 8/7 | 54/35 | 48/35 | 5/7 | 26/5 |