Durée : 4 heures - Calculatrices non autorisées

Le sujet comporte 4 exercices, indépendants entre eux.

Il sera tenu compte de la présentation et de la qualité de l'argumentation

---

EXERCICE 1 : CALCUL MATRICIEL.

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

2. Calculer P^2. Que peut-on en déduire concernant l'inversibilité de P et la suite $\left(P^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Calculer les produits ΔP et PM, et en déduire, sans calcul numérique : $P\Delta P = M$ **.**

4. Justifier que Δ est inversible et calculer son inverse.

5. Déterminer, pour tout entier naturel n : Δ^n et $\Delta^{-n} = (\Delta^{-1})^n$.

6. Montrer, sans calcul numérique, que pour tout entier relatif z : $(P\Delta P)^z = P\Delta^z P$.

7. Recalculer M^{-1} à l'aide de cette dernière formule.

8. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(P + I)^n = 2^{n-1}(P + I)$, de deux façons :
   a. par récurrence ;
   b. à l'aide de la formule du binôme (*indication* : on pourra chercher à montrer que la somme des coefficients binomiaux de rang impair sur la ligne de rang n du triangle de Pascal est égale à la somme des coefficients de la ligne de rang $(n – 1)$).
   c. En déduire la valeur de $(P + I)^{11}$.

EXERCICE 2 : CALCUL DE L' INTÉGRALE $I = \int_0^1 \ln\left(1+\sqrt[3]{t}\right) dt$

1. Justifier que l'intégrale I est bien définie, et qu'elle est positive.

2. En posant $x = 1+\sqrt[3]{t}$, montrer que $I = \int_1^2 3(x-1)^2(\ln x)dx$.

3. Procéder alors à une intégration par parties.
   (*indication* : dans la nouvelle intégrale obtenue devrait apparaître un cube que l'on développera pour pouvoir terminer les calculs).

4. Vérifier que le résultat obtenu est bien positif.

5. Quelle est la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\sqrt[3]{t}\right)$ sur l'intervalle $[0;1]$?

EXERCICE 3 : ÉTUDE DU COMPORTEMENT D'UNE SUITE RÉCURRENTE EN FONCTION DE SON PREMIER TERME.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite u de premier terme $u_0 = a$ et telle que pour tout naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n+2}$.

On trouvera page suivante en annexe un tableau de valeurs de u pour différentes valeurs de a.

1. Dans cette question, on étudie le cas $a = \dfrac{1}{2}$.
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$.
   b. Montrer que la suite u converge vers 0.

2. Dans cette question, on étudie le cas $a = 2$.
   On considère sur $[0, +\infty[$ la fonction $f : x \mapsto e^x - (x+1)(x+2)$.
   a. Etudier le signe de f''.
   b. Montrer que f' est strictement positive sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
   c. Déduire de ce qui précède que f est strictement positive sur l'intervalle $[3, +\infty[$.
   d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq n$.
   e. Montrer que la suite u diverge vers $+\infty$.

3. On suppose désormais a quelconque.
   On désigne par $E_a = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid u_n < 1 \right\}$.
   a. Déterminer $E_{1/2}$ et E_2.
   b. Démontrer que si E_a n'est pas vide la suite u converge vers 0.
   c. Démontrer que si E_a est vide : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \ln(n+2)$ et en déduire $\lim u = +\infty$.
4. Pour comparer deux situations, on désigne par v la suite u lorsque $u_0 = a$ et par w la suite u lorsque $u_0 = b$.
   a. Montrer que si $a < b$ alors pour tout naturel n : $v_n < w_n$.
   b. En déduire que les ensembles $I_0 = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid E_a \neq \varnothing \right\}$ et $I_\infty = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid E_a = \varnothing \right\}$ sont deux intervalles formant une partition de $\mathbb{R}$.
5. On admet qu'il existe un réel m tel que $I_0 =]-\infty, m[$ et $I_\infty = [m, +\infty[$.
   On admet également que, pour une valeur initiale $u_0 = a$ de u , le calcul des premiers termes de u conduira en un temps raisonnable à l'une des deux situations suivantes :
   . ou bien à partir d'un certain rang : u_n <1, auquel cas u converge vers 0 ;
   . ou bien à partir d'un certain rang $n \geq 3$: $u_n > n$, auquel cas u diverge vers $+\infty$.
   a. Ecrire en langage Pascal une FUNCTION uCVGpour(a : real) : boolean permettant de savoir, pour une valeur initiale a, si la suite u converge ou diverge.
   b. Ecrire en langage Pascal une PROCEDURE DST7(var a,b : real ; eps : real) utilisant la FUNCTION précédente et permettant d'obtenir par dichotomie un encadrement du réel m à ε près, connaissant un encadrement initial $a < m < b$ où $a \in I_0$ et $b \in I_\infty$.

ANNEXE – tableau de valeurs concernant l'exercice 3

n	Un	Un	Un	Un	Un	Un
0	0,5	1	1,35	1,37	1,4	2
1	0,824360635	1,359140914	1,928712765	1,967675348	2,027599983	3,694528049
2	0,760140759	1,297615858	2,293549177	2,384675506	2,531944779	13,40886105
3	0,534644306	0,915139741	2,477511963	2,713884885	3,144485921	166469,3835
4	0,341368204	0,499424836	2,382318207	3,017555217	4,64154836	#NOMBRE!
5	0,234478527	0,274628876	1,804996654	3,406876017	17,28413262	#NOMBRE!
6	0,180607046	0,188006024	0,868564444	4,310120527	4584641,501	#NOMBRE!
7	0,149743044	0,150855098	0,297935846	9,306182693	#NOMBRE!	#NOMBRE!
8	0,129059527	0,129203128	0,149675041	1222,87279	#NOMBRE!	#NOMBRE!
9	0,113775785	0,113792124	0,116145676	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
10	0,101863715	0,101865379	0,102105407	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
11	0,09226938	0,092269534	0,092291684	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
12	0,084358477	0,08435849	0,084360358	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
13	0,077715632	0,077715633	0,077715779	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
14	0,072054351	0,072054351	0,072054362	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
15	0,06716961	0,06716961	0,06716961	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
16	0,062910403	0,062910403	0,062910403	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
17	0,059162857	0,059162857	0,059162857	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!
18	0,055839369	0,055839369	0,055839369	#NOMBRE!	#NOMBRE!	#NOMBRE!

(NB : "#NOMBRE!" indique que le nombre obtenu dépasse les capacités de l'ordinateur)

EXERCICE 4 : POLYNÔMES D'EULER

Soit la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1}(x) = (n+1) \displaystyle\int_{Dec\left(\frac{n+1}{2}\right)}^{x} f_n(t)dt \end{cases}$

(rappel : $Dec(x) = x - Ent(x)$)

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $f_n(0) = 0$ si n est pair, et $f_n(\frac{1}{2}) = 0$ si n est impair.

2. Que représente f_{n+1} vis-à-vis de f_n ? (répondre par une phrase contenant le mot *primitive*)

3. Exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

4. Calculer f_1, f_2, f_3, f_4, et f_5.

5. Justifier que, pour tout naturel n, f_n est une fonction polynôme (appelée *polynôme d'Euler de rang n*), que son degré est n et que son coefficient dominant est égal a 1.

6. Démontrer par récurrence que pour tout naturel n : $f_n(1-x) = (-1)^n f_n(x)$. (*indications* : pour l'hérédité, après avoir posé $g_n(x) = f_n(1-x)$ et $h_n(x) = (-1)^n f_n(x)$, montrer que $g_{n+1}'(x) = h_{n+1}'(x) = (-1)^{n+1}(n+1)f_n(x)$; calculer $g_{n+1}(x) - h_{n+1}(x)$ lorsque $x = \frac{1}{2}$ ou lorsque $x = 0$ et $x = 1$, selon la parité de n. Conclure).

7. Déduire de la question 6 :
   a. que pour tout naturel n pair et non nul : $f_n(1) = 0$;
   b. que la courbe représentative de f_n présente des éléments de symétrie (remarquer que pour tout réel x, le milieu de l'intervalle d'extrémités x et $1 - x$ est fixe).

8. En s'inspirant de la méthode employée dans la question 6, démontrer pour tout naturel n : $f_n(1+x) + f_n(x) = 2x^n$.

9. Une utilisation de la formule précédente au calcul de $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^p$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^p = \frac{1}{2}\left[(-1)^n f_p(1+n) + f_p(1)\right]$.

   b. En déduire par exemple : $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$.