EXERCICE 1 : CALCUL MATRICIEL.

1. On dispose côte à côte et en un seul tableau les matrices M et I et on applique la méthode de Gauss-Jordan à ce tableau ; si l'on ne rencontre aucun pivot nul, c'est que M est inversible et on récupère en fin de calculs un tableau comportant côte à côte I et $\boxed{M^{-1}}$.
C'est le cas ici avec la matrice M proposée :

$$\left[\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right] \xrightarrow[Gauss-Jordan]{} \left[\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/12 & -1/6 & 1/12 & 1/6 \end{array}\right]\right]$$

2. On trouve $\boxed{P^2 = I}$ ie $P \times P = I$ et donc $\boxed{P \text{ est inversible et égale à son inverse}}$: $P = P^{-1}$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$: $P^{2n} = I$ et $P^{2n+1} = P$; $\boxed{\text{la suite } \left(P^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc périodique de période 2}}$.

3. $$\boxed{\Delta P = PM = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}}$$

Par associativité de la multiplication des matrices et sachant que $\Delta P = PM$ et $P^2 = I$, on peut écrire :
$P\Delta P = P(\Delta P) = P(PM) = (PP)M = IM = M$
CQFD

4. Δ est une matrice diagonale et dont aucun terme diagonal n'est nul : elle est donc inversible **CQFD**
Par propriété, son inverse s'obtient en inversant les termes diagonaux :

$$\boxed{\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}}$$

5. Δ et Δ^{-1} sont toutes deux diagonales : donc par propriété $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\Delta^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\Delta^{-n}} = \left(\Delta^{-1}\right)^n = \boxed{\begin{pmatrix} 1/4^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6^n \end{pmatrix}}$$

NB : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^* : \left(x^n\right)^{-1} = x^{-n} = \left(x^{-1}\right)^n$ donc $\Delta^{-n} = \left(\Delta^{-1}\right)^n = \left(\Delta^n\right)^{-1}$

6. Soit z un entier relatif et $(\mathcal{P}_z)$ la propriété : $(P\Delta P)^z = P\Delta^z P$.
   (a) : $(P\Delta P)^0 = I$ et $P\Delta^0 P = PIP = PP = I$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   (b) : soit $z \in \mathbb{N}$ et supposons $(\mathcal{P}_z)$ vraie. Alors : $(P\Delta P)^z\,(P\Delta P) = (P\Delta^z P)(P\Delta P)$ et par associativité : $(P\Delta P)^{z+1} = (P\Delta^z)(\mathrm{PP})(\Delta P) = (P\Delta^z)\mathrm{I}(\Delta P) = P(\Delta^z\,\mathrm{I}\Delta)P = P\Delta^{z+1}P$
   et donc $(\mathcal{P}_{z+1})$ est vraie.
   (c) : Par récurrence, il résulte de (a) et (b) que $(\mathcal{P}_z)$ est vraie pour tout entier z positif.
   (d) : Supposons $z < 0$; alors $-z > 0$ et d'après (c) : $(P\Delta P)^{-z} = P\Delta^{-z}P$ et par inversion :
   $[(P\Delta P)^{-z}]^{-1} = [P\Delta^{-z}P]^{-1}$ d'où grâce au NB du 5. et à la formule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:
   $[(P\Delta P]^{-(-z)} = P^{-1}(\Delta^{-z})^{-1}P^{-1}$ soit $(P\Delta P)^z = P\Delta^z P$ car $P^{-1} = P$; donc $(\mathcal{P}_z)$ est vraie si $z < 0$.
   Conclusion : il résulte de (c) et (d) que $(\mathcal{P}_z)$ est vraie pour tout entier relatif z **CQFD**

7. D'après 3. et 6. : $M^{-1} = P\Delta^{-1}P$. Le calcul de $P\Delta^{-1}P$ sous la forme $P(\Delta^{-1}P)$ donne :
$$P\Delta^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/12 & -1/6 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix}$$
   On retrouve bien la valeur de M^{-1} obtenue à la question 1. **CQFD**

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\mathcal{Q}_n)$ la propriété $(P + I)^n = 2^{n-1}(P + I)$.
   a. Si $n = 1$: $(P + I)^n = P + I$ et $2^{n-1}(P + I) = P + I$ donc $(\mathcal{Q}_1)$ est vraie.
      Supposons $n \geq 1$ et $(\mathcal{Q}_n)$ vraie ; démontrons que $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est alors vraie.
      $(P + I)^{n+1} = (P + I)^n \times (P + I) = [2^{n-1}(P + I)] \times (P + I) = 2^{n-1}(P + I)^2$.
      Or P et I commutent et $P^2 = I$ donc $(P + I)^2 = P^2 + 2P + I = I + 2P + I = 2(P + I)$
      Donc $(P + I)^{n+1} = 2^{n-1} \times [2(P + I)] = 2^n(P + I)$ ie $(\mathcal{Q}_{n+1})$ vraie.
      Par récurrence, on a donc bien $(\mathcal{Q}_n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ **CQFD**
   b. P et I commutent et $\forall k \in \mathbb{N}$: $I^k = I$, $P^{2k} = I$ et $P^{2k+1} = P$ donc :
$$(P+I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^k = \sum_{\substack{k=0,\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}I + \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}P.$$ Par ailleurs :
$$\sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ impair}}}^{n}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k} = 2^{n-1} = \frac{1}{2}\times 2^n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$ donc
$$\sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0,\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}$$ d'où $$\sum_{\substack{k=0,\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}I + \sum_{\substack{k=1,\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}P = 2^{n-1}I + 2^{n-1}P = 2^{n-1}(P+I)$$ **CQFD**
   c. $$\boxed{(P + I)^{11}} = 2^{11-1}(P + I) = 1024\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1024 & 0 \\ 0 & 0 & -1024 & 0 \\ 0 & 0 & 2048 & 0 \\ 1024 & 1024 & 1024 & 2048 \end{pmatrix}}$$

EXERCICE 2 : CALCUL DE L' INTÉGRALE $I = \int_0^1 \ln\left(1+\sqrt[3]{t}\right)dt$

1. $f : t \overset{(*)}{\mapsto} \sqrt[3]{t} \mapsto 1+\sqrt[3]{t} \mapsto \ln\left(1+\sqrt[3]{t}\right)$ est continue sur son ensemble de définition en tant que composée de fonctions continues; elle est en particulier continue, et donc intégrable, sur le segment $[0;1]$ et donc $I = \int_0^1 f(t)dt$ est bien définie **CQFD**

   De plus, $\forall t \in [0;1] : \sqrt[3]{t} \geq 0$ donc $1+\sqrt[3]{t} \geq 1$ et donc $\ln\left(1+\sqrt[3]{t}\right) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale et avec 0 < 1 on a donc $I \geq 0$ **CQFD**

   $^{(*)}$ $\sqrt[3]{}$ en tant que fonction réciproque de la fonction cube, est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. Si $x = 1+\sqrt[3]{t}$, alors $\sqrt[3]{t} = x-1$ et $t = (x-1)^3$ et de là : $\dfrac{dt}{dx} = 3(x-1)^2 \times 1$ d'où :

   $dt = 3(x-1)^2\,dx$ et donc : $I = \int_{1+\sqrt[3]{0}}^{1+\sqrt[3]{1}} (\ln x)\times 3(x-1)^2\,dx = \int_1^2 3(x-1)^2(\ln x)dx$ **CQFD**

3. Soit $u(x) = (x-1)^3$ et $v(x) = \ln x$; u et v sont de classe C^1 sur $[1;2]$ et $I = \int_1^2 u'(x)v(x)dx$

   Alors $I = [u(x)v(x)]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 u(x)v'(x)dx = \left[(x-1)^3\ln x\right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 (x-1)^3\dfrac{1}{x}dx$ et donc

   $$I = \ln 2 - \int_1^2\left(x^2-3x+3+\frac{1}{x}\right)dx = \ln 2 - \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x|\right]_{x=1}^{x=2} = \boxed{2\ln 2 - \frac{5}{6}}$$

4. 2ln2 = ln4 et 4 > e , donc 2ln2 > 1 > 5/6 et donc $I \geq 0$ (comme prévu en 1.) **CQFD**

5. f est intégrable sur $[0;1]$ donc sa valeur moyenne sur $[0;1]$ est, par définition :

   $\dfrac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)dt$ qui n'est autre que I ie $\boxed{2\ln 2 - \dfrac{5}{6}}$.

EXERCICE 3 : ÉTUDE DU COMPORTEMENT D'UNE SUITE RÉCURRENTE EN FONCTION DE SON PREMIER TERME.

1a. Lorsque a = ½, $(\mathcal{P}_n)$: $0 < u_n < 1$ est vraie pour n = 0 et n = 1 d'après le tableau de valeurs.

Soit $n \geq 1$ et supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie ie $0 < u_n < 1$; alors $1 < e^{u_n} < e$ et $n + 2 \geq 3 > 0$ donc

$0 < \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{e^{u_n}}{n+2} < \dfrac{e}{n+2} \leq \dfrac{e}{3} < 1$ et donc $0 < u_{n+1} < 1$ ie $(\mathcal{P}_{n+1})$ vraie.

Donc, par récurrence, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout naturel n **CQFD**

1b. D'après 1a. $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_{n+1} < \dfrac{e}{n+2}$ ie $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < u_n < \dfrac{e}{n+1}$.

Or, $\lim \dfrac{e}{n+1} = 0$; donc, par encadrement : lim u = 0 lorsque a = 1/2 **CQFD**

2a. $\forall x \geq 0 : f(x) = e^x - (x+1)(x+2)$ donc $f'(x) = e^x - 2x - 3$ et $f''(x) = e^x - 2$.

Or, $x \mapsto e^x - 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\ln 2$, donc :

$\boxed{f''(x) < 0 \text{ sur } [0, \ln 2[\ , \ f''(\ln 2) = 0 \text{ et } f''(x) > 0 \text{ sur }]\ln 2, +\infty[}$.

2b. $2 > 1 > \ln 2$ donc d'après 2a.: $f'' > 0$ sur $[2, +\infty[$ et donc f' croissante sur $[2, +\infty[$.

Or, $f'(2) = e^2 - 7 > 0$ (car $e^2 > 2{,}7^2 \geq 7{,}29 > 7$) donc $f' > 0$ sur $[2, +\infty[$ **CQFD**

2c. D'après 2b.: $f' > 0$ sur $[2, +\infty[$ et donc f est croissante sur $[2, +\infty[$. Or, $f(3) = e^3 - 20 > 0$ (car $e^3 > 2{,}718^3 \geq 20{,}079\,290\,232 > 20$) donc $f > 0$ sur $[3, +\infty[$ **CQFD**

2d. Lorsque $a = 2$, $(\mathcal{Q}_n)$: $u_n \geq n$ est vraie pour $0 \leq n \leq 3$ d'après le tableau de valeurs.

Soit $n \geq 3$ et supposons $(\mathcal{Q}_n)$ vraie ie $u_n \geq n$; alors $e^{u_n} \geq e^n$ et $u_{n+1} \geq e^n/(n+2)$. Or, d'après 2c., $\forall n \geq 3 : e^n - (n+1)(n+2) > 0$ donc $u_{n+1} \geq n+1$ ie $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vraie.

Ainsi, $(\mathcal{Q}_n)$ est vraie pour tout naturel n **CQFD**

2e. D'après 2d. $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq n$ et donc $\lim u = +\infty$ lorsque $a = 2$ **CQFD**

3a. D'après 1a. : $\boxed{E_{1/2} = \mathbb{N}^*}$ et d'après 2d. : $\boxed{E_2 = \varnothing}$.

3b. $E_a \neq \varnothing \Leftrightarrow [\exists N \geq 1 : u_N < 1]$ d'où, (cf. 1a.) : $\forall n \geq N : u_n < e/(n+2)$ et de là $\lim u = 0$ **CQFD**

3c. $E_a = \varnothing \Leftrightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \geq 1\right] \Leftrightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N}^* : e^{u_{n-1}}/(n+1) \geq 1\right] \Leftrightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N}^* : e^{u_{n-1}} \geq n+1\right]$

$E_a = \varnothing \Leftrightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N} : e^{u_n} \geq n+2\right] \Leftrightarrow \left[\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \ln(n+2)\right]$ **CQFD**

De plus : $\lim \ln(n+2) = +\infty$ donc $E_a = \varnothing \Rightarrow \lim u = +\infty$ **CQFD**

NB : E_a étant ou bien vide, ou bien non vide, il résulte de 3b. et de 3c. que, quelle que soit la valeur initiale a, la suite u ou bien converge vers 0, ou bien diverge vers $+\infty$.

4a. Si $a < b$ alors $v_0 < w_0$ et si $v_n < w_n$ alors $e^{v_n}/(n+2) < e^{w_n}/(n+2)$ ie $v_{n+1} < w_{n+1}$.

Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n < w_n$ **CQFD**

4b. Pour tout réel a, E_a est ou vide ou non vide donc I_0 et I_∞ sont complémentaires dans $\mathbb{R}$ ie $I_0 \cap I_\infty = \varnothing$ et $I_0 \cup I_\infty = \mathbb{R}$; de plus, $I_0 \neq \varnothing$ (car $1/2 \in I_0$) et $I_\infty \neq \varnothing$ (car $2 \in I_\infty$). Donc $\{I_0, I_\infty\}$ est une partition de $\mathbb{R}$ **CQFD**

D'après 4a. et le théorème de comparaison, si $a \in I_\infty$ alors $\forall b \geq a : b \in I_\infty$ et de même si $b \in I_0$ alors $\forall a \leq b : a \in I_0$; donc I_0 et I_∞ sont deux intervalles **CQFD** (plus précisément, I_0 est un intervalle qui, non borné inférieurement, est de la forme $]-\infty, m]$ ou $]-\infty, m[$ et donc son complémentaire I_∞ est respectivement de la forme $]m, +\infty[$ ou $[m, +\infty[$).

5a.

```
function uCVGpour(a : real) : boolean ;
var n : integer ; u : real ;
begin
n := 0 ; u := a ;
repeat u := exp(u) / (n + 2) ; n := n + 1 ;
until (u < 1) or ((n >= 3) and (u > n));
if u < 1 then uCVGpour := true
          else uCVGpour := false ;
end ;
```

5b.

```
procedure DST7(var a, b : real ; eps : real);
var m : real ;
begin
while b - a > eps do
    begin m := (a + b) / 2 ;
          if uCVGpour(m)
          then a := m else b := m ;
    end ;
end ;
```

EXERCICE 4 : POLYNÔMES D'EULER

1. Par définition : $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n(x) = n \int_{Dec(n/2)}^{x} f_{n-1}(t)dt$.

   Si l'entier naturel non nul n est pair, alors $n/2$ est entier et donc $Dec(n/2) = 0$ et les bornes de l'intégrale sont alors égales lorsque $x = 0$ et donc l'intégrale est nulle lorsque $x = 0$.
   De même, si n est impair, $Dec((p+1)/2) = 1/2$ et l'intégrale est nulle lorsque $x = 1/2$.
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(1/2) = 0$ si n est impair et $f_n(0) = 0$ si n est pair **CQFD**

2. <u>f_{n+1} est égale au produit par $(n+1)$ de la primitive F_n de f_n qui s'annule en $Dec((n+1)/2)$ ie qui s'annule en 0 si n est pair et en 1/2 si n est impair.</u>

3. D'après 2. : $f_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x)$ et $F_n' = f_n$, donc $\boxed{f_{n+1}'(x) = (n+1)f_n(x)}$.

4. En utilisant 2. : $f_1(x) = 1 \times \int_{Dec(1/2)}^{x} f_0(t)dt = \int_{1/2}^{x} 1\,dt = [t]_{t=1/2}^{t=x} = x - \frac{1}{2}$ soit $\boxed{f_1(x) = x - \frac{1}{2}}$;

   $f_2(x) = 2\int_{Dec(2/2)}^{x} f_1(t)dt = \int_0^x 2\left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \int_0^x (2t-1)\,dt = \left[t^2 - t\right]_{t=0}^{t=x} = x^2 - x$: $\boxed{f_2(x) = x^2 - x}$;

   puis : $\boxed{f_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}}$; $\boxed{f_4(x) = x^4 - 2x^3 + x}$; $\boxed{f_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}}$.

5. Soit $(\mathcal{P}_n)$: f_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.
   $(\mathcal{P}_0)$ est vraie puisque f_0 est une fonction constante, non nulle et égale à 1.
   Supposons $n \geq 0$ et $(\mathcal{P}_n)$ vraie ; alors f_n est un polynôme de degré n dont le monôme de plus haut degré est x^n et donc ses primitives sont des polynômes dont le monôme de plus haut degré est $x^{n+1}/(n+1)$ et donc f_{n+1} est un polynôme dont le monôme de plus haut degré est $(n+1) \times x^{n+1}/(n+1)$ ie x^{n+1} ; donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, et donc $\forall n \in \mathbb{N} : (\mathcal{P}_n)$ vraie **CQFD**

6. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{Q}_n) : g_n(x) = h_n(x)$ avec $g_n(x) = f_n(1-x)$ et $h_n(x) = (-1)^n f_n(x)$.
   Il s'agit de montrer que pour tout naturel n, $(\mathcal{Q}_n)$ est vraie.
   Si $n = 0$: $g_n(x) = f_0(1-x) \underset{déf\ de\ f_0}{=} 1$ et $h_n(x) = (-1)^0 f_0(x) = 1 \times 1 = 1$ donc $(\mathcal{Q}_0)$ est vraie.
   Soit $n \geq 0$ et $(\mathcal{Q}_n)$ vraie ie $g_n(x) = h_n(x)$; montrons $(\mathcal{Q}_{n+1})$ vraie ie $g_{n+1}(x) = h_{n+1}(x)$.
   $g_{n+1}'(x) = [f_{n+1}(1-x)]' = (1-x)' f_{n+1}'(1-x) = -(n+1)f_n(1-x) = -(n+1)g_n(x) = -(n+1)h_n(x)$
   et $h_{n+1}'(x) = \left[(-1)^{n+1} f_{n+1}(x)\right]' = (-1)^{n+1} f_{n+1}'(x) = (-1)^{n+1}(n+1)f_n(x) = -(n+1)h_n(x)$ donc
   $g_{n+1}'(x) = h_{n+1}'(x)$ et donc g_{n+1} et h_{n+1} ne diffèrent que d'une constante k.
   Ainsi $k = g_{n+1}(x) - h_{n+1}(x) = f_{n+1}(1-x) - (-1)^{n+1} f_{n+1}(x)$; prouver $(\mathcal{Q}_{n+1})$ revient alors à prouver $k = 0$, et pour cela il suffit d'utiliser les résultats obtenus à la question 1 :
   . si n est pair, alors pour $x = 1/2$: $k = f_{n+1}(1/2) - (-1)^{n+1} f_{n+1}(1/2) = 0 - 0 = 0$;
   . si n est impair et si $x = 0$: $k = f_{n+1}(1) - (-1)^{n+1} f_{n+1}(0) = f_{n+1}(1) - 0 = f_{n+1}(1)$; et si $x = 1$:
   $k = f_{n+1}(0) - (-1)^{n+1} f_{n+1}(1) = 0 - (-1)^{n+1} f_{n+1}(1) \underset{n\ impair}{=} -f_{n+1}(1)$ d'où $k = -k$ donc $k = 0$.
   Ainsi, dans tous les cas on a bien : $k = 0$ et par récurrence : $(\mathcal{Q}_n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ **CQFD**

7a. D'après 6 : $f_n(1-0)=(-1)^n f_n(0)$ et selon 1 : $f_n(0)=0$ si n est un naturel pair et non nul.
Donc, pour tout n naturel et non nul : $f_n(1)=0$ **CQFD**

7b. ((1 – x) + x)/2 = 1/2 donc { 1 – x, x } a pour milieu 1/2 et donc x et 1 – x sont symétriques par rapport à 1/2. De plus, d'après 6 : $f_n(1-x)=\left(-1\right)^n f_n(x)$. Donc :

. $\boxed{\text{si } n \text{ est pair}}$: $f_n(1-x)=f_n(x)$ donc les deux points d'abscisses 1 – x et x ont même ordonnée et sont donc symétriques-dans un repère orthogonal-par rapport à <u>la droite d'équation x = 1/2</u> qui <u>est</u> donc <u>axe de symétrie pour la courbe représentative de f_n</u> ;

. $\boxed{\text{si } n \text{ est impair}}$: $f_n(1-x)=-f_n(x)$ et cette fois-ci les deux points sont symétriques par rapport au <u>point de coordonnées (1/2, 0)</u> qui est donc <u>centre de symétrie pour la courbe</u>.

8. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $(\mathcal{R}_n)$: $p_n(x)=q_n(x)$ avec $p_n(x)=f_n(1+x)+f_n(x)$ et $q_n(x)=2x^n$.
Il s'agit de montrer que pour tout naturel n, $(\mathcal{R}_n)$ est vraie.
Pour n = 0 : $p_n(x)=f_0(1+x)+f_0(x)\underset{déf\ de\ f_0}{=}1+1=2$ et $q_n(x)=2x^0=2\times1=2$ (avec par convention x^0 = 1 pour tout réel x), donc $(\mathcal{R}_0)$ est vraie.
Soit $n\geq 0$ et $(\mathcal{R}_n)$ vraie ie $p_n(x)=q_n(x)$; montrons $(\mathcal{R}_{n+1})$ vraie ie $p_{n+1}(x)=q_{n+1}(x)$.
$p'_{n+1}(x)=f'_{n+1}(1+x)+f'_{n+1}(x)=(n+1)f_n(1+x)+(n+1)f_n(x)=(n+1)p_n(x)=(n+1)q_n(x)$ et
$q'_{n+1}(x)=2\left(n+1\right)x^n=(n+1)q_n(x)$ d'où $p'_{n+1}(x)=q'_{n+1}(x)$ et $p_{n+1}-q_{n+1}=m$, m constante.
Prouver $(\mathcal{R}_{n+1})$ revient donc à prouver m = 0. Or, pour x = 0 :
$m=p_{n+1}(0)-q_{n+1}(0)=f_{n+1}(1+0)+f_{n+1}(0)-2\times0^{n+1}=f_{n+1}(1)+f_{n+1}(0)$.
. si n est impair, n+1 est pair non nul donc : $f_{n+1}(1)=f_{n+1}(0)=0$ et donc m = 0 ;
. si n est pair, n+1 est impair et d'après 7b. : $f_{n+1}(1-0)=-f_{n+1}(0)$ et donc m = 0.
Donc m = 0 dans tous les cas, et par récurrence : $(\mathcal{R}_n)$ vraie $\forall n\in\mathbb{N}$ **CQFD**

9a. D'après 8 : $f_p(1+x)+f_p(x)=2x^p$ pour tout réel x et tout naturel p. Donc, pour tous naturels k et p : $k^p=\left[f_p(1+k)+f_p(k)\right]/2$ et de là, si n est un naturel ≥ 1 :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k k^p=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k\left[f_p(1+k)+f_p(k)\right]/2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(-1\right)^k f_p(1+k)+\left(-1\right)^k f_p(k)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k k^p=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[-\left(-1\right)^{k+1} f_p(1+k)+\left(-1\right)^k f_p(k)\right]\underset{téléscopage}{=}\frac{1}{2}\left[-\left(-1\right)^{n+1} f_p(n+1)-f_p(1)\right]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k k^p=\frac{1}{2}\left[\left(-1\right)^n f_p(n+1)-f_p(1)\right]$$ **CQFD**

9b. En utilisant le résultat précédent avec p = 2 et sachant que $f_2(x)=x^2-x=x(x-1)$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^k k^2=\frac{1}{2}\left[\left(-1\right)^n f_2(n+1)-f_2(1)\right]=\frac{1}{2}\left[\left(-1\right)^n (n+1)n-0\right]$$

soit : $-1^2+2^2-3^2+...+(-1)^n n^2=(-1)^n\dfrac{n(n+1)}{2}$ **CQFD**

(*NB* : on a donc aussi : $-1^2+2^2-3^2+...+(-1)^n n^2=(-1)^n(1+2+3+...+n)$ ☺)