Durée : 4 heures - Calculatrices non autorisées

Le sujet comporte 3 exercices, indépendants entre eux.

Il sera tenu compte de la présentation et de la qualité de l'argumentation

---

EXERCICE 1 : ETUDE D'UNE SUITE DE POLYNOMES.

Soit la suite de polynômes P_n définie par :

$P_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $P_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left[x + 2P_n(x) - (P_n(x))^2\right]$.

1. Déterminer P_1, P_2 et P_3.

2. Soit $Q(x) = x^3 - 16x^2 + 80x - 192$.
   a. Déterminer le nombre de racines de Q en étudiant ses variations.
   b. Calculer $Q(8)$ et $Q(10)$.
   c. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la racine de Q.
   d. Déduire de la question a. que P_3 n'admet que deux racines.

3. Démontrer par récurrence sur n chacune des propositions suivantes :
   a. $\forall n \geq 0 : P_n(0) = 0$
   b. $\forall n \geq 1 : d°P_n = 2^{n-1}$
   c. $\forall n \geq 2$: le coefficient dominant de P_n est égal à -2^{1-2^n}

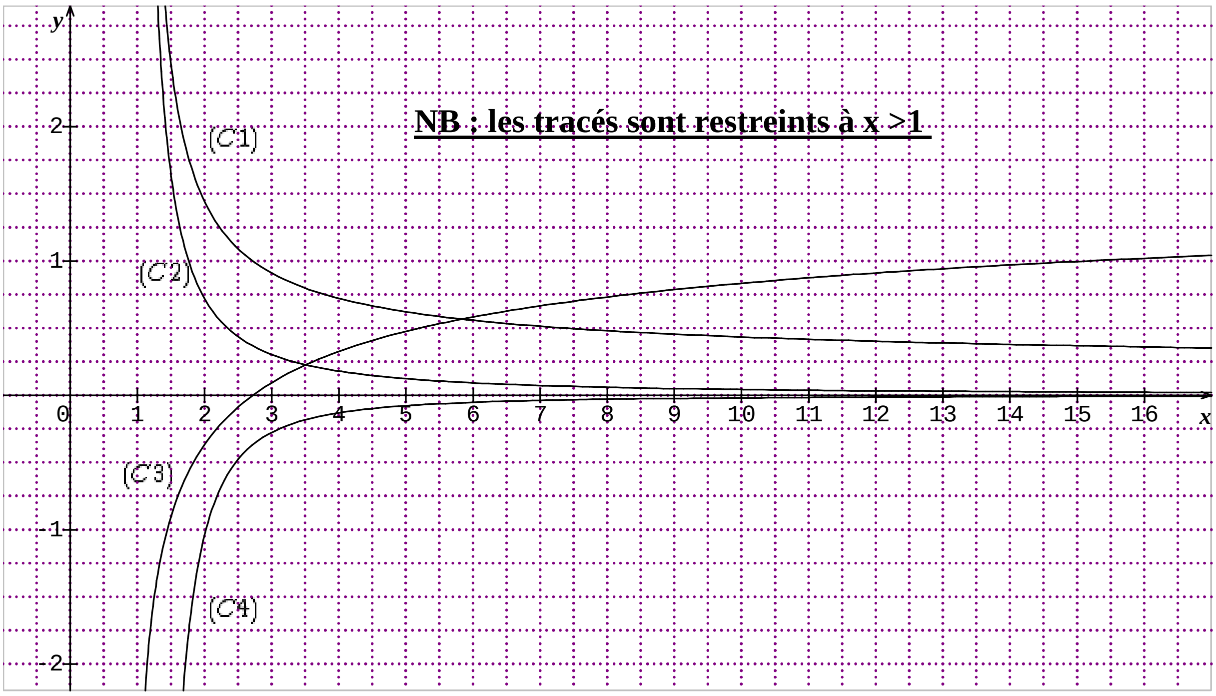
4. <u>Dans cette question, on suppose</u> $\boxed{x \in [0;1]}$ et on étudie la suite de réels $P_n(x), n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que si cette suite converge, ce ne peut être que vers $\sqrt{x}$ ou $-\sqrt{x}$.
   b. Démontrer : $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{x} - P_n(x)\right]\left[\sqrt{x} - P_n(x) + 2\left(1 - \sqrt{x}\right)\right]$.
   c. Démontrer par récurrence sur n : $\forall n \geq 0 : 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.
   d. Démontrer que la suite est croissante.
   e. Déduire de tout ce qui précède la convergence de la suite, et sa limite.

ANNEXE 1 – tableau de valeurs concernant l'exercice 2

Sommes partielles au rang *n* des développements en série de ln2 correspondant aux formules obtenues aux questions 2.c, 3.b et 4.d

n	2.c	3.b	4.d	*n*	2.c	3.b	4.d
0			0,67	12	0,65321068	0,69312959	0,69314718
1	1	0,5	0,69135802	13	0,73013376	0,69313898	0,69314718
2	0,5	0,625	0,69300412	14	0,65870518	0,69314334	0,69314718
3	0,83333333	0,66666667	0,69313476	15	0,72537185	0,69314537	0,69314718
4	0,58333333	0,68229167	0,69314605	16	0,66287185	0,69314633	0,69314718
5	0,78333333	0,68854167	0,69314707	17	0,72169538	0,69314678	0,69314718
6	0,61666667	0,69114583	0,69314717	18	0,66613982	0,69314699	0,69314718
7	0,75952381	0,6922619	0,69314718	19	0,7187714	0,69314709	0,69314718
8	0,63452381	0,69275019	0,69314718	20	0,6687714	0,69314714	0,69314718
9	0,74563492	0,6929672	0,69314718	21	0,71639045	0,69314716	0,69314718
10	0,64563492	0,69306486	0,69314718	22	0,67093591	0,69314717	0,69314718
11	0,73654401	0,69310925	0,69314718	23	0,71441417	0,69314718	0,69314718

ANNEXE 2 – tracés concernant l'exercice 3



EXERCICE 2 : DEVELOPPEMENTS EN SERIE DU LOGARITHME NEPERIEN.
On dit qu'une fonction f est *développable en série* sur une partie E de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une suite de fonctions f_n telle que, pour tout x de E, la série $\sum f_n(x)$ converge vers $f(x)$.

1. A titre d'exemples :
   a. proposer un développement en série de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$;
   b. proposer un développement de $\dfrac{1}{1-x}$ sur un ensemble convenable ;
   c. proposer un troisième exemple.

L'objet de cet exercice est de déterminer des développements en série liés au logarithme.

2. Développement en série de $\ln(1+x)$ sur]-1 ; 1] .

   Pour tout x de [0 ; 1[, on pose : $S_n(x)=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\dfrac{x^p}{p}$, $T_n(x)=S_{2n}(x)$ et $U_n(x)=S_{2n+1}(x)$.
   a. Montrer que les suites $T_n(x)$ et $U_n(x)$ sont adjacentes.
   b. Montrer que, pour tout x de [0 ; 1[, la dérivée de $S_n(x)-\ln(1+x)$ est $(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{1+x}$.
   c. En déduire le sens de variations de $T_n(x)-\ln(1+x)$ et de $U_n(x)-\ln(1+x)$.
   d. En déduire, pour tout x de [0 ; 1[: $T_n(x)\le\ln(1+x)\le U_n(x)$
   e. En déduire (en se souvenant par ailleurs que la série semi-harmonique converge vers ln2) que pour tout x de [0 ; 1] la série S converge vers $\ln(1+x)$.

   On admettra que, plus généralement, $\boxed{\text{sur]-1 ; 1] : } \ln(1+x)=\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}}$

3. Une variante du développement en série précédent.
   a. Justifier que $\boxed{\text{sur]-1 ; 1[: } \ln\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n\ge1}\dfrac{x^n}{n}}$
   b. En déduire la convergence et la somme des séries : $\sum_{n\ge1}\dfrac{0,5^n}{n}$, $\sum_{n\ge1}\dfrac{2^n}{n3^n}$ et $\sum_{n\ge1}\dfrac{1}{n10^n}$.

4. Deux autres variantes.
   a. Justifier que $\boxed{\text{sur]-1 ; 1[: } \ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\sum_{n\ge0}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}$
   b. Montrer que $f : x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ réalise une bijection de]-1 ; 1[vers]0 ; +∞[.
   c. En déduire que $\boxed{\text{pour tout t > 0 : } \ln t=2\sum_{n\ge0}\left[\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^{2n+1}\right]}$
   d. A l'aide de cette dernière formule, donner un développement en série de ln2 et de ln3.

5. Comparaison des vitesses de convergence de ces différents développements.
   On va comparer à titre d'exemple les deux développements de ln2 obtenus en 3.b et en 4.d
   a. Démontrer :

   $$\forall n\ge1: 0\le\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k k}\le\frac{1}{2^n(n+1)}\ (\textit{indications}:\ \forall k\ge n+1: \frac{1}{k}\le\frac{1}{n+1}\ \text{ et }\ \sum_{k\ge n+1}\frac{1}{2^k}=?)$$

   b. Démontrer de même : $\forall n\ge0: 0\le\ln 2-\dfrac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{9^k(2k+1)}\le\dfrac{1}{12(2n+3)9^n}$
   c. Commenter, et confirmer en s'appuyant sur le tableau de valeurs de l'annexe 1.

EXERCICE 3 : NATURE DES SERIES $\sum \frac{1}{n \ln n}$ ET $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

On pose, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p \ln p}$ et $T_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p(\ln p)^2}$.

L'objet de cet exercice est de démontrer que la série *S* diverge alors que la série *T* converge. Pour cela, on utilisera comme outil clé les inégalités des accroissements finis.

1. Montrer que le produit de deux fonctions définies, positives et croissantes sur un intervalle *I* est une fonction croissante sur *I* (*indication* : compléter et utiliser l'astuce suivante : $f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(b)\left[g(b) - g(a)\right] + g(a)\left[... - ...\right]$ ☺).

2. Convergence de la série *T*. On pose $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.
   a. Quel est l'ensemble de définition de *f* ?
   b. Dresser le tableau de variations de *f* sans calculer la dérivée de *f* . Préciser également les limites de *f* .
   c. Laquelle des courbes de l'annexe 2 correspond-elle à *f* ? (Justifier la réponse)
   d. Montrer que *f* admet un prolongement par continuité en 0.
   e. Justifier qu'on peut appliquer la formule des accroissements finis à *f* sur tout intervalle de la forme [*p*, *p*+1] où *p* est un entier supérieur ou égal à 2 (*NB* : on ne demande pas de l'appliquer ici).
   f. Montrer que la dérivée *f* ' de *f* est croissante sur]1 ; +∞[(grâce à la question 1., on doit pouvoir se passer du calcul de la dérivée de *f* ', ie de *f* '').
   g. Laquelle des courbes de l'annexe 2 correspond-elle à *f* ' ? (Justifier la réponse)
   h. Déduire des questions e. et f. un encadrement de $\frac{1}{\ln(p+1)} - \frac{1}{\ln p}$.
   i. En déduire pour tout n ≥ 2 : $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq T_n \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$.
   j. Conclure quant à la convergence de *T* et fournir un encadrement de sa somme.

3. Divergence de la série *S*. On pose : $g(x) = \ln(\ln x)$.
   a. Quel est l'ensemble de définition de *g* ?
   b. Dresser le tableau de variations de *g* sans calculer la dérivée de *g*. Préciser également les limites de *g* .
   c. Résoudre chacune des deux équations : $g(x) = 0$ et $g(x) = 1$.
   d. Laquelle des courbes de l'annexe 2 correspond-elle à *g* ? (Justifier la réponse sans tenir compte des choix précédents)
   e. Montrer que pour tout *x* > 1 : $g'(x) = \frac{1}{x \ln x}$.
   f. Laquelle des courbes de l'annexe 2 correspond-elle à *g'* ? (Justifier la réponse sans tenir compte des choix précédents).
   g. En s'inspirant de ce qui a été fait à la question 2. pour *T*, démontrer pour tout n ≥ 2 :
   $$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$
   h. En déduire la nature de la série *S* et un équivalent de S_n.

4. Comparativement au critère de convergence de la série de Riemann, peut-on s'étonner de la nature de chacune des séries *S* et de *T* ?