

EXERCICE 1 : ETUDE D'UNE SUITE DE POLYNOMES.

$$1. \quad P_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad P_2(x) = \frac{1}{8}x(8-x) \quad \text{et} \quad P_3(x) = \frac{1}{128}x(-x^3 + 16x^2 - 80x + 192).$$

$$2. \quad a. \quad Q(x) = x^3 - 16x^2 + 80x - 192 \quad \text{donc} \quad Q'(x) = 3x^2 - 32x + 80 = 3(x-4)(x-20/3)$$

D'après le tableau de variations ci-contre, on a $Q(x) \leq -64$ sur $]-\infty; 20/3]$ donc pas de racine sur cet intervalle.

x	$-\infty$	4	$20/3$	$+\infty$	
signe de Q'	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
var ^{ns} de Q	\nearrow	-64	\searrow	\nearrow	$+\infty$

De plus, le polynôme Q est continu et strictement monotone sur $]20/3; +\infty[$ et $Q(20/3) < 0$ et $Q(+\infty) > 0$ donc d'après le théorème de la bijection, Q s'annule une fois et une seule sur cet intervalle. Le polynôme Q n'admet donc qu'une racine.

$$2b. \quad Q(8) = -64; \quad Q(10) = 8.$$

2c. $Q(8) < 0 < Q(10)$ donc α , unique racine de Q , est comprise entre 8 et 10.

En procédant par dichotomie, on trouve $Q(9) = -39$ donc $9 < \alpha < 10$, puis $Q(9,5) = -18,625$ d'où l'encadrement à 0,5 près : $9,5 < \alpha < 10$.

2d. D'après la valeur trouvée en 1. pour P_3 : $P_3(x) = (-1/128)xQ(x)$ donc P_3 admet exactement deux racines (à savoir : 0 et α). CQFD

3a. $P_0 = 0$ donc $P_0(0) = 0$; supposons $P_n(0) = 0$: alors $P_{n+1}(0) = (1/2)(0 + 2 \times 0 - 0^2) = 0$, et donc, selon le principe de récurrence : $\forall n \geq 0 : P_n(0) = 0$ CQFD

3b. $P_1(x) = x/2$ donc $d^\circ P_1 = 1 = 2^{1-1}$. Soit $n \geq 1$ et supposons $d^\circ P_n = 2^{n-1}$: on a alors $d^\circ(2P_n) = d^\circ(P_n) = 2^{n-1}$, $d^\circ(P_n^2) = 2d^\circ(P_n) = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$. De plus, $d^\circ x = 1$ et $n \geq 1$, on a donc $d^\circ x \leq d^\circ(2P_n) < d^\circ(P_n^2)$ et donc $d^\circ(P_{n+1}) = d^\circ(P_n^2) = 2^n = 2^{(n+1)-1}$.

Donc $\forall n \geq 1 : d^\circ P_n = 2^{n-1}$ CQFD

3c. Désignons par $CD(P_n)$ le coefficient dominant de P_n . On a : $CD(P_2) = -1/8 = -2^{1-2^2}$.

Soit $n \geq 2$ et supposons $CD(P_n) = -2^{1-2^n}$; or $CD(P_{n+1}) = CD[1/2(-P_n^2)] = -1/2[CD(P_n)]^2$ donc $CD(P_{n+1}) = -1/2(-2^{1-2^n})^2 = -2^{-1} \times 2^{2(1-2^n)} = -2^{-1+2-2^{n+1}} = -2^{1-2^{n+1}}$.

Ainsi $\forall n \geq 2$: le coefficient dominant de P_n est égal à -2^{1-2^n} CQFD

4a. Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \beta$. Alors, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de

récurrence de P : $\beta = (x + 2\beta - \beta^2)/2$, soit $\beta^2 = x$, et puisque $x \geq 0$: $\beta = \pm\sqrt{x}$ CQFD

4b. $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x} - [x + 2P_n(x) - (P_n(x))^2]/2 = [2(\sqrt{x} - P_n(x)) - (x - (P_n(x))^2)]/2$ d'où

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left[2 - (\sqrt{x} + P_n(x)) \right] / 2 = \dots$$

4c. $P_0 = 0$ et $\forall x \geq 0 : 0 \leq \sqrt{x}$ donc $\forall x \in [0;1] : 0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x}$. Soit $n \geq 0$, et supposons $\forall x \in [0;1] : 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$. Démontrons alors $\forall x \in [0;1] : 0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

$$P_{n+1}(x) = [x + 2P_n(x) - (P_n(x))^2]/2 \geq [x + 2P_n(x) - (\sqrt{x})^2]/2 \geq P_n(x) \geq 0; \text{ de plus :}$$

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \frac{1}{2} [\sqrt{x} - P_n(x)] [\sqrt{x} - P_n(x) + 2(1 - \sqrt{x})] \geq 0 \text{ car } P_n(x) \leq \sqrt{x} \text{ et } \sqrt{x} \leq 1.$$

Ainsi : $0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ CQFD et en vue de 4d/e : $\forall n \geq 0 : \sqrt{x} \geq P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$.

4d/e : D'après 4c : la suite $P_n(x)$ est croissante, positive et majorée, donc elle converge, sa limite est elle-même positive et donc, d'après 4a égale à \sqrt{x} CQFD

EXERCICE 2 : DEVELOPPEMENTS EN SERIE DU LOGARITHME NEPERIEN.

1. Voir le formulaire du cours concernant les séries usuelles.

$$2a. T_{n+1}(x) - T_n(x) = S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \geq 0 \text{ car } 0 \leq x \leq 1, \text{ d'où } T_n(x) \text{ croissante.}$$

$$U_{n+1}(x) - U_n(x) = S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \leq 0 \text{ d'où } U_n(x) \text{ décroissante.}$$

$$T_n(x) - U_n(x) = S_{2n}(x) - S_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \text{ or } 0 \leq x \leq 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} [T_n(x) - U_n(x)] = 0.$$

Les trois résultats ci-dessus prouvent que les suites $T_n(x)$ et $U_n(x)$ sont adjacentes CQFD

$$2b. [S_n(x) - \ln(1+x)]' = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \frac{px^{p-1}}{p} - \frac{1}{1+x} = \sum_{p=1}^n (-x)^{p-1} - \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k - \frac{1}{1+x}; \text{ or}$$

$$0 \leq x < 1 \text{ donc } [S_n(x) - \ln(1+x)]' = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} - \frac{1}{1+x} = \frac{-(-x)^n}{1+x} = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x} \quad \boxed{\text{CQFD}}$$

$$2c. \text{ D'après 2b. : } [T_n(x) - \ln(1+x)]' = -\frac{x^{2n}}{1+x} \leq 0 \text{ et } [U_n(x) - \ln(1+x)]' = \frac{x^{2n+1}}{1+x} \geq 0 \text{ donc}$$

sur $]0;1[$: $x \rightarrow T_n(x) - \ln(1+x)$ est décroissante et $x \rightarrow U_n(x) - \ln(1+x)$ est croissante.

$$2d. \text{ D'après 2c. : } T_n(x) - \ln(1+x) \leq T_n(0) - \ln(1+0) = 0 = U_n(0) - \ln(1+0) \leq U_n(x) - \ln(1+x)$$

donc $\forall x \in]0;1[: T_n(x) \leq \ln(1+x) \leq U_n(x)$ CQFD

2e. D'après 2a., les suites $T_n(x)$ et $U_n(x)$ sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite $L(x)$. Mais $T_n = S_{2n}$ et $U_n = S_{2n+1}$, donc $S_n(x)$ converge aussi vers $L(x)$. D'après 2d.

et le théorème des gendarmes : $L(x) = \ln(1+x)$, d'où $\forall x \in]0;1[: \ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

et c'est encore vrai pour $x = 1$ car la série semi-harmonique converge vers $\ln 2$ CQFD

$$3a. \ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) = -\ln(1+(-x)); \text{ or, si } x \in]-1;1[\text{ alors } -x \in]-1;1[\text{ et, d'après l'énoncé,}$$

$$2e. \text{ est valable sur }]-1;1[\text{ donc } \ln \frac{1}{1-x} = -\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{2n+2} \frac{x^n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \quad \boxed{\text{CQFD}}$$

3b. $0,5$, $2/3$ et $1/10$ appartiennent à $] -1;1[$ donc, d'après 3a. :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{0,5^n}{n} = \ln \frac{1}{1-0,5} = \boxed{\ln 2}; \text{ de même : } \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n3^n} = \boxed{\ln 3} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n10^n} = \boxed{\ln \frac{10}{9}}.$$

$$4a. \text{ Sur }]-1;1[: 1+x > 0 \text{ et } 1-x > 0 \text{ donc } \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) + \ln \frac{1}{1-x}; \text{ utiliser 2e. et 3a. ...}$$

4b. f continue et strictement croissante

$$4c. \text{ En résolvant l'équation : } \frac{1+x}{1-x} = t \text{ on détermine } \forall t > 0 : x = f^{-1}(t) = \frac{t-1}{t+1} \in]-1;1[$$

Il n'y a plus qu'à remplacer $\frac{1+x}{1-x}$ par t et x^{2n+1} par $\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{2n+1}$ dans 4a. ...

$$4d. \text{ D'après 4c., avec } t = 2 : \ln 2 = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{2-1}{2+1}\right)^{2n+1} = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^{2n+1}} = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{3^{2n}} \frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } \boxed{\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{9^n (2n+1)}}; \text{ de même, avec } t = 3, \text{ on trouvera : } \boxed{\ln 3 = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n (2n+1)}}.$$

5a. D'après 3b. : $\ln 2 = \sum_{n \geq 1} \frac{0,5^n}{n}$ d'où $\ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k}$. Or :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k} \leq \sum_{k \geq n+1} \frac{1}{2^k (n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2^{p+n+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{n+1} (n+1)} \times \frac{1}{1-1/2}$$

d'où $0 \leq \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k k} \leq \frac{1}{2^{n+1} (n+1)} \times 2 = \frac{1}{2^n (n+1)}$ **CQFD**

5b. De même : $\ln 2 - \frac{2}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{9^k (2k+1)} = \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{9^k (2k+1)} \leq \frac{2}{3} \frac{1}{[2(n+1)+1]} \frac{1}{9^{n+1}} \frac{1}{1-1/9}$ etc.

5c. $\frac{1}{12(2n+3)9^n} = o\left(\frac{1}{2^n (n+1)}\right)$ donc, d'après 5a. et 5b., la convergence vers $\ln 2$ de la série du

3b. est plus rapide que celle du 4d. comme cela apparaît dans le tableau de l'annexe 1 : on obtient 8 chiffres significatifs dès $n = 7$ pour 4d. alors qu'il faut attendre $n = 23$ pour 3b. (quant à la série semi-harmonique 2c. il semble qu'on n'en verra jamais la fin !)

EXERCICE 3 : NATURE DES SERIES $\sum \frac{1}{n \ln n}$ **ET** $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

1. $f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(b)[g(b) - g(a)] + g(a)[f(b) - f(a)]$; or f et g sont positives donc $f(b) \geq 0$ et $g(a) \geq 0$ et f et g sont croissantes donc si $a \leq b$ alors $[f(b) - f(a)] \geq 0$ et $[g(b) - g(a)] \geq 0$ d'où $f(b)g(b) - f(a)g(a) \geq 0$ ie fg croissante **CQFD**

2a. $f(x)$ défini ssi $\ln(x)$ existe et est non nul, ie $x > 0$ et $x \neq 1$ ie $x \in]0;1[\cup]1, +\infty[$.

2b.

\ln est strictement croissante sur $]0;1[$ et sur $]1, +\infty[$
donc son inverse f est strictement décroissante sur chacun de ces deux intervalles

x	0	1	$+\infty$
variat ^{ns} de f	0	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{0^+} f = 1/\ln 0^+ = 1/+\infty = 0 ; \lim_{1^\pm} f = 1/\ln 1^\pm = 1/0^\pm = \pm\infty ; \lim_{+\infty} f = 1/\ln(+\infty) = 1/+\infty = 0$$

2c. La courbe demandée est **(C1)** car f est décroissante sur $]1, +\infty[$ et $f(e) = 1$ ($e \approx 2,7$).

2d. f admet une limite finie en 0^+ , égale à 0 ; donc en posant $f(0) = \lim_{0^+} f = 0$, on prolonge f par continuité en 0 **CQFD**

2e. f est continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ donc, pour tout $p \geq 2$, continue sur $[p, p+1]$ et dérivable sur $]p, p+1[$; on peut donc appliquer la formule des accroissements finis à f sur tout intervalle de la forme $[p, p+1]$ avec $p \geq 2$ **CQFD**

2f. $f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$; or \ln est croissante et positive sur $]1, +\infty[$ donc,

d'après 1., \ln^2 aussi et de même $F : x \mapsto x(\ln x)^2$ donc $-\frac{1}{F}$, ie f' , aussi **CQFD**

2g. La courbe cherchée est **(C4)** car f' est croissante et ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

2h. D'après 2f., f' est croissante sur $[p, p+1]$, donc : $f'(p) \leq f' \leq f'(p+1)$. Donc, avec 2e., et les inégalités des accroissements finis : $1 \times f'(p) \leq f(p+1) - f(p) \leq 1 \times f'(p+1)$ ie :

$$\forall p \geq 2 : -\frac{1}{p(\ln p)^2} \leq \frac{1}{\ln(p+1)} - \frac{1}{\ln p} \leq -\frac{1}{(p+1)[\ln(p+1)]^2}$$

2i. Selon 2h. : $\frac{1}{p(\ln p)^2} \geq \frac{1}{\ln p} - \frac{1}{\ln(p+1)}$ donc si $n \geq 2$: $T_n = \sum_{p=2}^n \frac{1}{p(\ln p)^2} \geq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)}$

Si $n \geq 3$: $T_n = \sum_{p=2}^n \frac{1}{p(\ln p)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \sum_{p=3}^n \frac{1}{p(\ln p)^2} = \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \sum_{q=2}^{n-1} \frac{1}{(q+1)[\ln(q+1)]^2}$

Or, grâce à 2h. : $\sum_{q=2}^{n-1} \frac{1}{(q+1)[\ln(q+1)]^2} \leq \sum_{q=2}^{n-1} \left[\frac{1}{\ln q} - \frac{1}{\ln(q+1)} \right] \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$, d'où si $n \geq 3$:

$T_n \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$ inégalité vraie aussi pour $n = 2$ (en effet : $T_2 = \frac{1}{2(\ln 2)^2}$).

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$: $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq T_n \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$ **CQFD**

2j. T converge car c'est une série à termes positifs majorée par $\frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$ d'après 2i.

Quand $n \rightarrow +\infty$, l'encadrement obtenu en 2i. donne $\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$

3a. $g(x) = \ln(\ln(x))$ est calculable ssi $\ln(x) > 0$ ie ssi $x \in]1; +\infty[$.

3b.

\ln est strictement croissante, d'où $g = \ln \circ \ln$ aussi.

$\lim_{1^+} g = \ln(\ln(1^+)) = \ln(0^+) = -\infty$;

$\lim_{+\infty} g = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

x	1	$+\infty$
variat ^{ns} de g	$-\infty$	$+\infty$

3c. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ et $g(x) = 1 \Leftrightarrow \ln x = e \Leftrightarrow x = e^e$.

3d. $g(e) = 0$ donc la courbe demandée est **(C3)**.

3e. Par dérivation de fonction composée : $g'(x) = \frac{1}{\ln x} \times (\ln x)' = \frac{1}{\ln x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$ **CQFD**

3f. $g'(e) = 1/e$ et $1/e \approx 1/3$, donc la courbe demandée est **(C2)**.

3g. Pour tout entier $p \geq 2$, g est continue et dérivable sur $[p, p+1]$. D'après 1. $H : x \mapsto x \ln x$ est croissante sur $[p, p+1]$ donc $g' = 1/H$ est décroissante, et $g'(p+1) \leq g' \leq g'(p)$. D'où par les inégalités des accroissements finis : $1 \times g'(p+1) \leq g(p+1) - g(p) \leq 1 \times g'(p)$ donc, ..(à détailler).. d'où $\forall n \geq 2 : \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq \frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$ **CQFD**

3h. $\lim [\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2)] = +\infty$ donc d'après 3g. : $S_n \rightarrow +\infty$. $\ln(\ln 2) = o[\ln(\ln(n+1))]$

donc $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \sim \ln(\ln(n+1))$ et de même $\frac{1}{2 \ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \sim \ln(\ln n)$.

$n \sim n+1$ et $n \rightarrow +\infty$ donc $\ln(n+1) \sim \ln n$ et $\ln(n) \rightarrow +\infty$ donc $\ln(\ln(n+1)) \sim \ln(\ln n)$.

Donc, d'après 3g. et le théorème des gendarmes : $S_n / \ln(\ln n) \rightarrow 1$, ie $S_n \sim \ln(\ln n)$

(et donc la divergence de S vers $+\infty$ est très très lente ...)

4. La série de terme général $1/n^\alpha$ converge ssi $\alpha > 1$; on aurait pu penser que la présence de $\ln n$ aurait fait basculer S et T dans la catégorie $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$. Apparemment, c'est vrai pour T 😊 mais pas pour S 😞, comme quoi il ne faut jamais jurer de rien !