

NB : la rédaction ne devra pas dépasser 4 pages.

THEME : RECHERCHE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION $a^b = b^a$.

1. Proposer quelques couples (a,b) solutions de cette équation (dont au moins un dans lequel a ou b soit strictement négatif).

On s'intéresse désormais aux seuls couples de réels strictement positifs.

2. Démontrer : $a^b = b^a \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$.
3. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.
 - a. Etudier les variations de f .
 - b. Discuter du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs de m .

On désigne par S l'ensemble des couples (a,b) tels que $0 < a < b$ et $a^b = b^a$.

4. A l'aide de la question 3., montrer que S ne contient qu'un seul couple d'entiers.
5. Soit $(a,b) \in S$; par définition de S , on a donc $b/a > 1$ et on pose $\frac{b}{a} = 1 + \gamma$ avec $\gamma > 0$.
Montrer qu'alors : $a = (1 + \gamma)^{1/\gamma}$ et $b = (1 + \gamma)^{1+1/\gamma}$.
6. On pose $T = \{((1 + \gamma)^{1/\gamma}, (1 + \gamma)^{1+1/\gamma}) \mid \gamma > 0\}$; démontrer $T = S$.
(indications : On a déjà montré $S \subset T$: où cela ? Démontrer $T \subset S$ après avoir étudié le sens de variations de $\alpha : x \mapsto (1 + x)^{1/x}$ et de $\beta : x \mapsto (1 + x)^{1+1/x}$ sur $]0, +\infty[$).
7. Le graphique ci-joint représente les fonctions f , α et β .
 - a. Préciser quelle courbe représente quelle fonction.
 - b. Déterminer graphiquement b lorsque $a = 1,5$.
 - c. Déterminer graphiquement γ pour le couple (a,b) précédent.
 - d. Déterminer graphiquement le couple (a,b) correspondant à $\gamma = 2$, et vérifier à l'aide des valeurs exactes de a et de b .

REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS f , α et β .

