1. $\boxed{(2,4), (4,2), (-2,-4),(-4,-2), \text{ par exemple ; également } (x,x) \text{ pour tout } x > 0}$.
ATTENTION ! l'exposant est prioritaire par rapport à +, -, × et / . Ainsi, en l'absence de parenthèses : $-2^3 = -(2^3)$; $2 + 5^6 = 2 + (5^6)$; $4\text{-}9^3 = 4\text{-}(9^3)$; $3 \times 7^2 = 3 \times (7^2)$; $4/5^8 = 4/(5^8)$.

2. Quand $a > 0$ et $b > 0$: $a^b = b^a \Leftrightarrow e^{b\ln a} = e^{a\ln b} \Leftrightarrow b\ln a = a\ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b}$ **CQFD**.

3a. $f'(x) = (1-\ln x)/x^2$ donc la dérivée de f a le même signe que $1 - \ln x$

x	0		e		$+\infty$
signe($f\,'(x)$)	||	$+$	0	$-$	
variations de f	||	$-\infty$ ↗	$1/e$	↘	0

3b. f est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0,e]$ et $[e,+\infty[$, et sa restriction à chacun de ces deux intervalles est une bijection vers $]-\infty,1/e]$ et $]0;1/e]$; or, $]-\infty,1/e] \cap]0;1/e] =]0;1/e]$, $[\,f(x) = 1/e \Leftrightarrow x = e\,]$ et $[\,f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1\,]$ donc $f(x) = m$ aura $\boxed{0, 1 \text{ ou } 2 \text{ solutions selon que } m \text{ appartient à }]1/e,+\infty],\ \{1/e\} \cup]-\infty,0] \text{ ou }]0;1/e[}$.

4b. Par définition de S et de f : $(a,b) \in S \Rightarrow [\,0 < a < b$ et $f(a) = f(b)\,]$; $a \neq b$: on est donc dans le cas où $f(x) = m$ admet deux solutions distinctes, d'où d'après 3a. : $1 < a < e < b$ et donc si a est entier, il ne peut s'agir que de 2, d'où $\boxed{\text{un seul couple d'entiers dans } S : (2;4)}$.

5. Si $(a,b) \in S$ alors $b/a = 1+\gamma$ et donc $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b} = \dfrac{\ln[a(1+\gamma)]}{a(1+\gamma)} = \dfrac{\ln a + \ln(1+\gamma)}{a(1+\gamma)}$ d'où

$(1+\gamma)\ln a = \ln a + \ln(1+\gamma)$, puis $\gamma \ln a = \ln(1+\gamma)$ soit $\ln a = \dfrac{1}{\gamma}\ln(1+\gamma) = \ln\left[(1+\gamma)^{1/\gamma}\right]$ et

enfin $a = (1+\gamma)^{1/\gamma}$, et comme $b = a(1+\gamma)$: $b = (1+\gamma)^{1/\gamma}(1+\gamma) = (1+\gamma)^{1+1/\gamma}$ **CQFD**

6. D'après 5. et par définition de T : si $(a,b) \in S$ alors $(a,b) \in T$, et donc $S \subset T$.
Réciproquement, soit $(a,b) \in T$; alors il existe $\gamma > 0$ tel que $a = (1+\gamma)^{1/\gamma}$ et $b = (1+\gamma)^{1+1/\gamma}$, donc $b = a(1+\gamma)$ et $0 < a < b$. De plus, $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{(1/\gamma)\ln(1+\gamma)}{(1+\gamma)^{1/\gamma}} = \dfrac{\ln(1+\gamma)}{(1/\gamma)(1+\gamma)^{1/\gamma}}$ et de même

$\dfrac{\ln b}{b} = \dfrac{(1+1/\gamma)\ln(1+\gamma)}{(1+\gamma)^{1+1/\gamma}} = \dfrac{1+\gamma}{\gamma}\,\dfrac{\ln(1+\gamma)}{(1+\gamma)(1+\gamma)^{1/\gamma}} = \dfrac{\ln(1+\gamma)}{\gamma(1+\gamma)^{1/\gamma}}$, d'où $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b}$ ie $a^b = b^a$.

Ainsi : $0 < a < b$ et $a^b = b^a$ donc $(a,b) \in S$ et donc $T \subset S$ **CQFD**
NB : contrairement à ce que pouvait laisser supposer l'énoncé, la démonstration de l'égalité entre S et T ne nécessitait pas l'étude préalable des fonctions α et β

7a. $\forall x > 0 : \alpha'(x) = \left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]' = \left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right]' = \left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]' e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \dfrac{x-(x+1)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\alpha(x)$

Donc $\alpha'(x)$ a le même signe que $A(x) = x-(x+1)\ln(1+x)$; or, $A'(x) = -\ln(1+x) < 0$ donc $\forall x > 0 : A(x) < A(0) = 0$ et donc $\boxed{\alpha \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[}$.

$\forall x > 0 : \beta'(x) = [(1+x)\alpha(x)]' = \alpha(x) + (1+x)\alpha'(x) = ... = \dfrac{(x+1)[x-\ln(1+x)]}{x^2}\alpha(x)$

Or, $\forall x > 0 : \ln(1+x) < x$ donc $\forall x > 0 : \beta'(x) > 0$ et $\boxed{\beta \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$.

$\boxed{\text{Les courbes } (C1), (C2) \text{ et } (C3) \text{ représentent donc respectivement } \alpha, \beta \text{ et } f}$.

7b. On trace A_1, point d'abscisse 1,5 sur ($C3$) ; la valeur de b cherchée est l'abscisse de B_2, l'autre point de ($C3$) qui a même ordonnée que A_1. On lit $\boxed{b \approx 7,5}$.

7c. γ est l'abscisse du point A_2 d'ordonnée 1,5 sur ($C2$) : on lit $\boxed{\gamma \approx 4}$ et on peut vérifier que, d'après 7b., c'est aussi celle du point B_2 d'ordonnée 7,5 sur ($C1$).

7d. a et b sont les ordonnées des points A_3 et B_3 d'abscisse 2 respectivement sur ($C2$) et ($C1$); on lit : $\boxed{a \approx 1,75 \text{ et } b \approx 5,2}$

D'après la définition des fonctions α et β, les valeurs exactes de a et b sont $3^{1/2}$ et $3^{3/2}$ ie $\boxed{\sqrt{3} \text{ et } 3\sqrt{3}}$; or : $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$, donc $5,19 < 3\sqrt{3} < 5,22$ ce qui est en accord avec les lectures graphiques qui ont été faites à moins de 3/100 près.