

EXERCICE 1 : UNE PROBABILITÉ SUR $([0, N], \mathcal{P}([0, N]))$,
PROLONGEABLE À $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

On considère, pour tout entier naturel $k \geq 2$: $u_k = \frac{k^2}{k^2 - 1}$ et $v_k = \ln u_k$.

1. Démontrer par récurrence sur N : $\forall N \geq 2, \prod_{k=2}^N u_k = \frac{2N}{N+1}$.
2. En déduire que pour tout entier naturel $N \geq 2$, on peut choisir deux réels v_0 et v_1 de façon que les v_k soient les probabilités élémentaires d'une probabilité p sur $([0, N], \mathcal{P}([0, N]))$.
3. Justifier que la série de terme général v_k converge, et étendre le résultat obtenu en 2. à l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
4. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $x_n = \prod_{k=1}^n u_{2k}$.
 - a. Démontrer par récurrence sur n : $\forall n \geq 1, x_n = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}$.
 - b. A l'aide de la formule de Stirling (cf. DST4), démontrer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.
 - c. Montrer alors que, parmi les couples (v_0, v_1) de la question 3., il n'en existe qu'un seul pour lequel l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des impairs soient équiprobables.

EXERCICE 2 : UNE PROBABILITÉ SUR $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$.

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $u_{p,q} = 2^{-p-q-2}$.

1. Dresser un tableau des valeurs de $u_{p,q}$ pour p et q compris chacun entre 0 et 3 (on donnera les valeurs sous forme de fraction irréductible).
2. Montrer que la suite double u permet de définir une probabilité p sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$.
(indications : on admettra que si une série double de terme général positif converge lorsqu'on calcule sa somme dans un certain ordre, alors cette série converge –et vers la même limite– pour tout autre ordre de calcul. Dans ces conditions, les règles de calcul vues pour les sommes doubles dans le cas fini se généralisent de la façon suivante :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right).$$

3. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 $A = \{(p, q) | p = q\}$; $B = \{(p, q) | p \text{ et } q \text{ pairs}\}$; $C = \{(p, q) | p \text{ et } q \text{ impairs}\}$
 $D = \{(p, q) | p \text{ et } q \text{ de même parité}\}$; $E = \{(p, q) | p \text{ et } q \text{ de parités différentes}\}$
 $F_{a,b} = \{(p, q) | p \text{ multiple de } a \text{ et } q \text{ multiple de } b\}$ où a et b sont deux naturels non nuls.
 Vérifier la dernière formule lorsque $a = b = 1$ et lorsque $a = b = 2$.
 Déterminer $\lim_{a \rightarrow \infty} p(F_{a,b})$ et $\lim_{a \rightarrow \infty} p(F_{a,a})$.
 Résoudre $p(F_{a,a}) < 4/15$.