

EXERCICE 1 : UNE PROBABILITÉ SUR $(\llbracket 0, N \rrbracket, \wp(\llbracket 0, N \rrbracket))$ ET SUR $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$.

On considère, pour tout entier naturel $k \geq 2$: $u_k = \frac{k^2}{k^2 - 1}$ et $v_k = \ln u_k$.

1. Soit \mathcal{P}_N : $\prod_{k=2}^N u_k = \frac{2N}{N+1}$ la propriété que l'on veut montrer vraie $\forall N \geq 2$.

. Pour $N = 2$: $\mathcal{P}_N \Leftrightarrow \prod_{k=2}^2 u_k = \frac{2 \times 2}{2+1} \Leftrightarrow u_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2^2}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ donc \mathcal{P}_2 est vraie.

. Soit $N \geq 2$ et \mathcal{P}_N vraie ; démontrons \mathcal{P}_{N+1} vraie, auquel cas \mathcal{P}_N sera vraie $\forall N \geq 2$.

$$\prod_{k=2}^{N+1} u_k = \left(\prod_{k=2}^N u_k \right) \times u_{N+1} \stackrel{\mathcal{P}_N \text{ vraie}}{=} \frac{2N}{N+1} \times \frac{(N+1)^2}{(N+1)^2 - 1} = \frac{2N(N+1)}{N^2 + 2N} = \frac{2(N+1)}{(N+1)+1} \quad \text{CQFD}$$

2. $\forall N \geq 2$: $0 < N^2 - 1 < N^2$ donc $N^2 / (N^2 - 1) > 1$ et $\ln(N^2 / (N^2 - 1)) > 0$ ie $v_N \geq 0$.

$$\text{De plus : } \sum_{k=2}^N v_k = \sum_{k=2}^N \ln u_k = \ln \prod_{k=2}^N u_k = \ln \frac{2N}{N+1} < \ln \frac{2N+2}{N+1} \leq \ln 2 < \ln e < 1.$$

Il suffit donc de choisir v_0 et v_1 positifs et $v_0 + v_1 = 1 - \ln[2N / (N+1)]$ – par exemple :

$$\boxed{v_0 = v_1 = \left\{ 1 - \ln \left[\frac{2N}{N+1} \right] \right\} / 2}$$
 – auquel cas $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$: $v_k \geq 0$ et $\sum_{k=0}^N v_k = 1$, ce qui

définit une seule probabilité p sur $(\llbracket 0, N \rrbracket, \wp(\llbracket 0, N \rrbracket))$ vérifiant $\forall k, p(\{k\}) = v_k$ **CQFD**

3. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^N v_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \frac{2N}{N+1} = \ln 2$ et donc la série de terme général v_k converge **CQFD**.

En choisissant $\boxed{v_0 = v_1 = (1 - \ln 2) / 2}$, et sachant que \mathbb{N} est dénombrable, on obtient par le même procédé qu'en 2. une unique probabilité p sur l'espace $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$ tout entier **CQFD**

4. On pose, pour tout entier naturel non nul n : $x_n = \prod_{k=1}^n u_{2k}$ et \mathcal{Q}_n : $x_n = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}$.

a. $\mathcal{Q}_1 \Leftrightarrow u_2 = \frac{2^4 (1!)^4}{3[(2)!]^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{16 \times 1}{3[2]^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{16}{12} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ donc \mathcal{Q}_1 est vraie. Il reste à

montrer que si $n \geq 1$ et \mathcal{Q}_n vraie, alors \mathcal{Q}_{n+1} vraie ie $x_{n+1} = \frac{2^{4n+4} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^2}$.

Or, $x_{n+1} = x_n \times u_{2(n+1)}$ et $u_k = \frac{k^2}{k^2 - 1} = \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$ et \mathcal{Q}_n vraie donc :

$$x_{n+1} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \times \frac{[2(n+1)]^2}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \times \frac{2^2 (n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$x_{n+1} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \times \frac{2^2 (n+1)^2}{2^2 (n+1)^2} \times \frac{2^2 (n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2^{4n} (n!)^4 \times 2^4 (n+1)^4}{(2n+1)^2 [(2n)!]^2 [2(n+1)]^2 (2n+3)}$$

$$x_{n+1} = \frac{2^{4n+4} [n!(n+1)]^4}{\{(2n+1)[(2n)!][2(n+1)]\}^2 (2n+3)} = \frac{2^{4n+4} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^2} \quad \text{CQFD}$$

b. D'après la formule de Stirling et la règle : $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$:

$$[n!]^4 \sim [\sqrt{2\pi n} \times n^n e^{-n}]^4 \sim (2\pi)^2 n^{4n+2} e^{-4n} \text{ et de même } [(2n)!]^2 \sim 2\pi (2n)^{4n+1} e^{-4n}.$$

De plus, \sim est compatible avec produit/quotient, et $2n+1 \sim 2n$ donc :

$$x_n \sim \frac{2^{4n} \times (2\pi)^2 n^{4n+2} e^{-4n}}{2n \times 2\pi (2n)^{4n+1} e^{-4n}} \sim \frac{2^{4n+1} \times \pi \times n^{4n+2}}{2 \times 2^{4n+1} \times n^{4n+2}} \sim \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{CQFD}$$

c. $p(2\mathbb{N}) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_{2k} = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_{2k} = v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(u_{2k}) = v_0 + \ln \prod_{k=1}^{+\infty} u_{2k} = v_0 + \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right) = v_0 + \ln \frac{\pi}{2}$

On veut $p(2\mathbb{N}) = p(2\mathbb{N}+1)$; $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ étant contraires, on aura $p(2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}$ d'où

$$\boxed{v_0 = \frac{1}{2} - \ln \frac{\pi}{2}} \text{ et puisque } v_0 + v_1 = 1 - \ln 2 : v_1 = \frac{1}{2} + \ln \frac{\pi}{2} - \ln 2 \text{ ou } \boxed{v_1 = \frac{1}{2} + \ln \frac{\pi}{4}}$$

On n'obtient bien qu'un seul couple (v_0, v_1) satisfaisant la condition imposée **CQFD**

EXERCICE 2 : UNE PROBABILITÉ SUR $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$.

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $u_{p,q} = 2^{-p-q-2}$.

1. Tableau de valeurs de $u_{p,q}$

$p \backslash q$	0	1	2	3
0	1/4	1/8	1/16	1/32
1	1/8	1/16	1/32	1/64
2	1/16	1/32	1/64	1/128
3	1/32	1/64	1/128	1/256

2. $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, u_{p,q} = 2^{-p-q-2} \geq 0$.

De plus, la suite $q \mapsto u_{p,q} = 2^{-p-2} 2^{-q}$ est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme 2^{-p-2} ; la raison est en valeur absolue inférieure à 1 donc la série associée converge

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = 2^{-p-2} \frac{1}{1-1/2} = 2^{-p-2} \times 2 = 2^{-p-1}. \text{ De même : } \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p-1} = 2^{-1} \frac{1}{1-1/2} = 2^{-1} \times 2 = 1.$$

Ainsi : $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = 1$, donc la série double $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q}$ converge et sa somme vaut 1.

\mathbb{N}^2 étant dénombrable, les $u_{i,j}$ remplissent les conditions permettant de définir une probabilité p sur $(\mathbb{N}^2, \mathcal{P}(\mathbb{N}^2))$, la seule pour laquelle $p(\{(i, j)\}) = u_{i,j}$ **CQFD**

3. Par définition de p , pour tout événement $E \subset \mathbb{N}^2$: $p(E) = \sum_{(i,j) \in E} u_{i,j}$. Ainsi :

$$p(A) = \sum_{i=j} u_{i,j} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-k-2} = 2^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3} \text{ donc } \boxed{p(A) = \frac{1}{3}}.$$

$$p(B) = \sum_{i \text{ et } j \text{ pairs}} u_{i,j} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{2m,2n} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} 2^{-2m-2n-2} = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} 4^{-m-n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-m-n-1}$$

$$p(B) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(4^{-m-1} \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(4^{-m-1} \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{+\infty} (4^{-m}) = \frac{1}{3} \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \text{ donc } \boxed{p(B) = \frac{4}{9}}.$$

$$p(C) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 2^{-(2i+1)-(2j+1)-2} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 4^{-i-j-2} = 4^{-1} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 4^{-i-j-1} = \frac{1}{4} p(B) \text{ ie } \boxed{p(C) = \frac{1}{9}}.$$

$$D = B \cup C \text{ et } B \cap C = \emptyset \text{ donc } p(D) = p(B) + p(C) \text{ d'où } \boxed{p(D) = \frac{5}{9}}.$$

$E = \overline{D}$ donc $p(E) = 1 - p(D)$ soit $\boxed{p(E) = \frac{4}{9}}$ (avec p , on a donc autant de chances de tomber sur un couple d'entiers pairs que sur un couple d'entiers de parités différentes).

$$p(F_{a,b}) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} 2^{-ia-jb-2} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-ia-jb-2} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(2^{-ia-2} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-jb} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(2^{-ia-2} \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-b})^j \right)$$

$$p(F_{a,b}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(2^{-ia-2} \frac{1}{1-2^{-b}} \right) = \frac{1}{1-2^{-b}} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-ia-2} = \frac{2^{-2}}{1-2^{-b}} \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-ia} = \frac{2^{-2}}{1-2^{-b}} \frac{1}{1-2^{-a}}$$

$$p(F_{a,b}) = \frac{2^{-2}}{1-2^{-a}} \frac{1}{1-2^{-b}} \text{ ou encore } \boxed{p(F_{a,b}) = \frac{2^{a+b-2}}{(2^a-1)(2^b-1)}}$$

Tout entier naturel est multiple de 1 donc $F_{1,1} = \mathbb{N}^2$ donc on devrait trouver $p(F_{1,1}) = 1$, ce

$$\text{qui est bien le cas : } \frac{2^{1+1-2}}{(2^1-1)(2^1-1)} = \frac{2^0}{1 \times 1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ CQFD}$$

Les multiples de 2 sont les entiers pairs, donc $F_{2,2} = B$ et on devrait trouver $p(F_{2,2}) = \frac{4}{9}$ ce

$$\text{qui est également vrai : } \frac{2^{2+2-2}}{(2^2-1)(2^2-1)} = \frac{4}{3 \times 3} = \frac{4}{9} \text{ CQFD}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} p(F_{a,b}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2^{-2}}{1-2^{-a}} \frac{1}{1-2^{-b}} = \frac{2^{-2}}{1-0} \frac{1}{1-2^{-b}} \text{ soit } \boxed{\lim_{a \rightarrow \infty} p(F_{a,b}) = \frac{2^{-2}}{1-2^{-b}}}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} p(F_{a,a}) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2^{-2}}{1-2^{-a}} \frac{1}{1-2^{-a}} = \frac{2^{-2}}{(1-0) \times (1-0)} \text{ soit } \boxed{\lim_{a \rightarrow \infty} p(F_{a,a}) = \frac{1}{4}}.$$

$$p(F_{a,a}) < \frac{4}{15} \Leftrightarrow \frac{2^{-2}}{(1-2^{-a})(1-2^{-a})} < \frac{4}{15} \Leftrightarrow (1-2^{-a})^2 > \frac{15}{16} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{(1-2^{-a})^2} > \sqrt{\frac{15}{16}} > 0$$

$$\text{Or, } a \geq 1 \Rightarrow 2^{-a} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1-2^{-a} \geq \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(1-2^{-a})^2} = 1-2^{-a} \text{ d'où}$$

$$p(F_{a,a}) < \frac{4}{15} \Leftrightarrow 2^{-a} < 1 - \frac{\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow -a \ln 2 < \ln \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4} \right) \Leftrightarrow a > -\ln \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4} \right) / \ln 2$$

A l'aide d'une calculatrice et sachant $a \in \mathbb{N}^*$, on en déduit : $\boxed{p(F_{a,a}) < \frac{4}{15} \Leftrightarrow a \geq 5}$.