

THEMES : PROBABILITES SUR UN UNIVERS FINI – SOMMES - SERIES

Pour tout entier naturel N , on considère l'univers $\Omega_N = \llbracket 0, N \rrbracket$.

On va étudier dans ce devoir deux exemples de probabilité sur $(\Omega_N, \wp(\Omega_N))$.

EXEMPLE 1 : On pose $\forall k \in \Omega_N : q_k = 2^{-N} \binom{N}{k}$.

1. Montrer que les q_k permettent de définir une probabilité p_N sur $(\Omega_N, \wp(\Omega_N))$.
2. p_N est-elle la probabilité uniforme ?
3. On considère les événements : $E = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ premier}\}$; $F = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ carré parfait}\}$.
 - a. E et F sont-ils incompatibles ?
 - b. Calculer $p_{10}(E)$ et $p_{10}(F)$.
4. On considère les événements : $P = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ pair}\}$; $I = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ impair}\}$.
 - a. Que peut-on dire des événements P et I , et en particulier lorsque $N = 0$?
 - b. Calculer les probabilités de P et de I lorsque N est non nul ; commenter (*indication* : on pourra réutiliser un résultat obtenu dans le DST7 sans le redémontrer).

EXEMPLE 2 : On pose $\forall k \in \Omega_N : q_k = \frac{3(k+1)(k+2)}{(N+1)(N+2)(N+3)}$.

5. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$.
6. Montrer que les q_k permettent de définir une probabilité p_N sur $(\Omega_N, \wp(\Omega_N))$.
7. p_N est-elle la probabilité uniforme ?
8. Ecrire en Pascal une FUNCTION PN qui calcule, pour une valeur de N donnée et un événement donné E , la probabilité $p_N(E)$. On définira un TYPE evenement adapté aux circonstances.
9. On considère à nouveau les événements P et I définis à la question 4, et on cherche à calculer leur probabilité en fonction de N .
 - a. Démontrer $\forall m \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^m (2i+1)(2i+2) = \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(4m+3)$ de deux façons :
 - . 1^{ère} façon : à l'aide d'un raisonnement par récurrence ;
 - . 2nde façon : sans récurrence, en exhibant les sommes $\sum i$ et $\sum i^2$.
 - b. En déduire $p_N(P) = \frac{2N+1}{4(N+2)}$ si N impair, et $p_N(P) = \frac{(N+4)(2N+3)}{4(N+1)(N+3)}$ si N pair.
 - c. En déduire les expressions respectives de $p_N(I)$.
 - d. Calculer ainsi $p_N(P)$ et $p_N(I)$ lorsque $N = 7$ puis lorsque $N = 8$.
 - e. Comparer, selon les valeurs de N , les probabilités des événements P et I .
 - f. Quelles sont les limites de $p_N(P)$ et de $p_N(I)$ lorsque N tend vers l'infini ?
10. Montrer que la série $\sum_N p_N(P)$ diverge, mais que la série $\sum_N \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right]$ converge.
11. Calculer $\sum_{N \geq 0} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right]$ (*indice* : $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{N=0}^{2n+1} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right] = \dots = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$)