

EXEMPLE 1 : On pose $\forall k \in \Omega_N : q_k = 2^{-N} \binom{N}{k}$.

- $\forall k \in \Omega_N : q_k \geq 0$ et $\sum_{k=0}^N q_k = 2^{-N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} = 2^{-N} 2^N = 1$; donc, si $p_N(\{k\}) = q_k$, on définit bien une probabilité p_N sur $(\Omega_N, \wp(\Omega_N))$ **CQFD** (et $\forall A \in \wp(\Omega_N) : p_N(A) = \sum_{k \in A} q_k$).
- p_N est la probabilité uniforme ssi $\forall k \in \Omega_N : q_k = 1/\text{card } \Omega_N = 1/(N+1)$ ce qui est **vérifié pour $N=0$ et pour $N=1$, mais faux $\forall N \geq 2$** car alors $q_0 (= 2^{-N}) \neq q_1 (= 2^{-N} \times N)$.
- On considère les événements : $E = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ premier}\}$; $F = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ carré parfait}\}$.
 - Tout carré parfait $k = i^2$ est divisible par i ; si, de plus, k est premier, alors $k \geq 2$ et donc $i > 1$. Or, $i^2 = i$ ssi $i = 0$ ou $i = 1$, donc $i \neq 1$ et $i \neq k$. Ainsi, k serait divisible par autre chose que 1 et k donc k serait non premier, ce qui est contradictoire. Donc aucun carré parfait n'est premier et donc $E \cap F = \emptyset$ ie **E et F sont incompatibles**.
 - $p_{10}(E) = p_{10}(\{2, 3, 5, 7\}) = q_2 + q_3 + q_5 + q_7 = 2^{-10} \left[\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} \right] = \frac{537}{1024}$
De la même façon : $p_{10}(F) = p_{10}(\{0, 1, 4, 9\}) = \frac{231}{1024}$.
- On considère les événements : $P = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ pair}\}$; $I = \{k \in \Omega_N \mid k \text{ impair}\}$.
 - Tout entier est ou bien pair ou bien impair, donc **P et I sont contraires**. De plus, **lorsque $N=0$** : $\Omega_N = \{0\}$, donc $P = \{0\}$ et $I = \emptyset$ ie **P est certain et I impossible**.
 - D'après a. : $p_0(P) = 1$ et $p_0(I) = 0$ donc P et I sont non équiprobables lorsque $N=0$.
Si $N \neq 0$: $p_N(P) = \sum_{0 \leq k \text{ pair} \leq N} q_k = 2^{-N} \times \sum_{0 \leq k \text{ pair} \leq N} \binom{N}{k} \stackrel{\text{DST7 EX1-8b}}{=} 2^{-N} \times 2^{N-1} = 1/2$; or, $I = \bar{P}$
d'où $p_N(I) = 1 - p_N(P)$ donc **$p_N(I) = 1/2 = p_N(P)$** et donc **P et I équiprobables**.

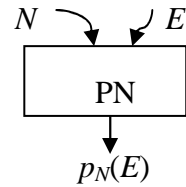
EXEMPLE 2 : On pose $\forall k \in \Omega_N : q_k = \frac{3(k+1)(k+2)}{(N+1)(N+2)(N+3)}$.

- $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n+1} (i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 + \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
 $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{6} [(2n+3) + 3] = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$ **CQFD**
- $\forall k \in \Omega_N : q_k \geq 0$ et $\sum_{k=0}^N q_k = \sum_{k=0}^N \frac{3(k+1)(k+2)}{(N+1)(N+2)(N+3)} = \frac{3 \sum_{k=1}^{N+1} k(k+1)}{(N+1)(N+2)(N+3)} \stackrel{(cf.5)}{=} 1$ **CQFD**
- $(k+1)(k+2)$ vaut 2 et 6 pour $k=0$ et pour $k=1$; donc, **en dehors du cas $N=0$, la probabilité p_N n'est pas uniforme**.
- Un événement E est une partie de $\llbracket 0, N \rrbracket$ qui peut donc être décrit à l'aide d'un $(n+1)$ -uplet dans lequel l'élément de rang k est 1 (ou TRUE) si $k \in E$ et 0 (ou FALSE) sinon. Ainsi, on supposera disposer du **TYPE événement = array[0..max] of boolean**, avec **CONST max = valeur maximale prévue pour N** .

```

FUNCTION PN(N : integer ; E : evenement) : real ;
var k : integer ; s : real ;
begin
s := 0 ;
for k := 0 to N do if E[k] then s := s + (k+1)*(k+2) ;
PN := 3*s/((N+1)*(N+2)*(N+3)) ;
end ;

```



9. a. Soit à montrer que $\mathcal{P}_m : \sum_{i=0}^m (2i+1)(2i+2) = \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(4m+3)$ est vraie $\forall m \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{P}_0 : 2 = 2$ donc \mathcal{P}_0 est vraie. Soit $m \geq 0$ et supposons \mathcal{P}_m vraie ; montrons qu'alors \mathcal{P}_{m+1} est vraie, auquel cas \mathcal{P}_m sera vraie $\forall m \in \mathbb{N}$ selon le principe de récurrence.

$$\sum_{i=0}^{m+1} (2i+1)(2i+2) = \sum_{i=0}^m (2i+1)(2i+2) + (2m+3)(2m+4) \text{ et comme } \mathcal{P}_m \text{ est vraie :}$$

$$\sum_{i=0}^{m+1} (2i+1)(2i+2) = \frac{1}{3}(m+1)(m+2)(4m+3) + 2(2m+3)(m+2) \text{ d'où :}$$

$$\sum_{i=0}^{m+1} (2i+1)(2i+2) = \frac{1}{3}(m+2)[(m+1)(4m+3) + 6(2m+3)] = \frac{1}{3}(m+2)(4m^2 + 19m + 21)$$

$$-3 \text{ est racine de } 4m^2 + 19m + 21 \text{ d'où } \sum_{i=0}^{m+1} (2i+1)(2i+2) = \frac{1}{3}(m+2)(m+3)(4m+7) \text{ et}$$

donc \mathcal{P}_{m+1} est vraie **CQFD**

Proposons maintenant une démonstration sans récurrence :

$$\sum_{i=0}^m (2i+1)(2i+2) = \sum_{i=1}^{m+1} (2i-1)2i = 4 \sum_{i=1}^{m+1} i^2 - 2 \sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{3} - \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^m (2i+1)(2i+2) = \frac{(m+1)(m+2)}{3} [2(2m+3) - 3] = \frac{(m+1)(m+2)(4m+3)}{3} \text{ **CQFD**}$$

b. $p_N(P) = \sum_{0 \leq k \text{ pair} \leq N} \frac{3(k+1)(k+2)}{(N+1)(N+2)(N+3)} = \frac{3}{(N+1)(N+2)(N+3)} \sum_{0 \leq k \text{ pair} \leq N} (k+1)(k+2)$

. si N impair $= 2n+1$: $\sum_{0 \leq k \text{ pair} \leq N} (k+1)(k+2) = \sum_{k=2i}^n (2i+1)(2i+2) \stackrel{\text{cf. a.}}{=} \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{3}$

et comme $n = (N-1)/2$: $p_N(P) = \frac{\mathfrak{X}((N-1)/2+1)((N-1)/2+2)(4(N-1)/2+3)}{\mathfrak{X}(N+1)(N+2)(N+3)}$ ie

$$p_N(P) = \frac{\cancel{(N+1)} \cancel{(N+3)} (4N+2)}{8 \cancel{(N+1)} (N+2) \cancel{(N+3)}} = \frac{(4N+2)}{8(N+2)} = \frac{(2N+1)}{4(N+2)} \text{ **CQFD**}$$

. si N pair $= 2n$: $\sum_{0 \leq k \text{ pair} \leq N} (k+1)(k+2) = \sum_{k=2i}^n (2i+1)(2i+2) \stackrel{\text{cf. a.}}{=} \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{3}$ et

$$n = N/2 \text{ donc } p_N(P) = \frac{\mathfrak{X}(N/2+1)(N/2+2)(4N/2+3)}{\mathfrak{X}(N+1)(N+2)(N+3)} = \frac{\cancel{(N+2)} (N+4)(4N+6)}{8(N+1) \cancel{(N+2)} (N+3)}$$

ie $p_N(P) = \frac{(N+4)(4N+6)}{8(N+1)(N+3)} = \frac{(N+4)(2N+3)}{4(N+1)(N+3)} \text{ **CQFD**}$

c. $I = \bar{P}$ donc $\boxed{p_N(I)} = 1 - p_N(P) = \begin{cases} (2N+7)/[4(N+2)] & \text{si } N \text{ impair} \\ N(2N+5)/[4(N+1)(N+3)] & \text{si } N \text{ pair} \end{cases}$.

d. A l'aide de b. et de c. : $p_7(P) = \frac{5}{12}; p_7(I) = \frac{7}{12}; p_8(P) = \frac{19}{33}; p_8(I) = \frac{14}{33}$

e. $4(N+2) = 4N+8 > 4N+2 = 2(2N+1)$ donc si N impair : $p_N(I) < \frac{1}{2} < p_N(P)$

$(N+4) > (N+3)$ et $4(N+1) < 2(2N+3)$ d'où si N pair : $p_N(I) > \frac{1}{2} > p_N(P)$

(NB : ainsi, P et I ne sont ici jamais équiprobables, contrairement au 1^{er} exemple)

f. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(2N+1)}{4(N+2)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(N+4)(2N+3)}{4(N+1)(N+3)} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n+1}(P) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{2n}(P) = \frac{1}{2}$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(P) = \frac{1}{2}$ et comme $p_N(I) = 1 - p_N(P)$: $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(I) = \frac{1}{2}$.

10. D'après 9f., $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(P) \neq 0$ donc la série $\sum_N p_N(P)$ diverge **CQFD**

D'après 9b. : $p_N(P) - \frac{1}{2} = \begin{cases} -3/[4(N+2)] & \text{si } N \text{ est impair} \\ 3(N+2)/[4(N+1)(N+3)] & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$

Donc : $p_N(P) - \frac{1}{2} = (-1)^N u_N$ avec $u_N = \begin{cases} 3/[4(N+2)] & \text{si } N \text{ est impair} \\ 3(N+2)/[4(N+1)(N+3)] & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$

La suite u tend vers 0 et si on parvient à montrer que u est décroissante, on aura montré

que la série $\sum_N \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right]$ est alternée, et donc convergente.

$u_{N+1} - u_N = \begin{cases} 3/[4(N+3)] - 3(N+2)/[4(N+1)(N+3)] & \text{si } N \text{ est pair} \\ 3(N+3)/[4(N+2)(N+4)] - 3/[4(N+2)] & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$

$u_{N+1} - u_N = \begin{cases} -3/[4(N+1)(N+3)] & \text{si } N \text{ est pair} \\ -3/[4(N+2)(N+4)] & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}$

Donc $\forall N \in \mathbb{N} : u_{N+1} - u_N \leq 0$ et donc u est décroissante **CQFD**

11. Puisque $\sum_{N \geq 0} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right]$ converge, sa somme est aussi égale à $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{N=0}^{2n+1} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right]$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{N=0}^{2n+1} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right] = \sum_{k=0}^n \left[\left(p_{2k}(P) - \frac{1}{2} \right) + \left(p_{2k+1}(P) - \frac{1}{2} \right) \right] = \sum_{k=0}^n [u_{2k} - u_{2k+1}]$

donc d'après 10. : $\sum_{N=0}^{2n+1} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right] = \sum_{k=0}^n \frac{3}{4(2k+1)(2k+3)}$

et donc $\sum_{N=0}^{2n+1} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2k+1)} - \frac{1}{(2k+3)} \right) \stackrel{\text{téléscopage}}{=} \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right)$

et comme $\lim \left[\frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right) \right] = \frac{3}{8}$, on en déduit : $\sum_{N \geq 0} \left[p_N(P) - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{8}$