

NB : la rédaction ne devra pas dépasser une copie double, hors texte en Pascal.

EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION – UN EQUIVALENT DE $\ln \frac{n!}{n^n}$ EN $+\infty$.

On pose : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \ln \sqrt{x}$ et $g(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

1. a. Quel est l'ensemble de définition de f ?
b. Etudier le sens de variations de f et ses limites aux bornes ouvertes de son ensemble de définition.
2. a. Justifier que g est définie pour tout x strictement positif.
b. Que représente g pour f ?
c. Calculer $g(x)$.
d. Montrer que g admet une limite en 0^+ .
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
 - a. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \ln \frac{n!}{n^n}$.
 - b. En encadrant, pour tout k de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, l'intégrale $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt$, établir les encadrements

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ puis } \int_{1/n}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$
 - c. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = -1$ et de là, un équivalent de $\ln \frac{n!}{n^n}$.
 - d. Peut-on en déduire : $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$? (on pourra se référer utilement au DST4)

EXERCICE 2 : ALGORITHME DE GENERATION DES POLYNOMES D'EULER EN LANGAGE PASCAL.

En complément au DST7, on souhaite écrire en Pascal un algorithme permettant de constituer, pour tout entier naturel n , une liste de tous les polynômes d'Euler de rang inférieur ou égal à n . On nommera EULER cet algorithme.

On utilisera les types POLYNOME = array[-1 .. max] of real

LISTE_DE_POLYNOMES = array [0 .. max] of POLYNOME

(max étant une constante Pascal désignant de façon classique le rang maximal autorisé pour un tableau) .

L'élément de rang k d'une variable de type POLYNOME contiendra le coefficient du monôme de degré k du polynôme ainsi représenté, et l'élément de rang -1 contiendra le degré de ce polynôme (et dans le cas du polynôme nul - seul polynôme ne possédant pas de degré, on pourra choisir de placer dans cet élément une valeur strictement négative).

Pour les besoins d'EULER, on créera deux algorithmes auxiliaires :

. INTEGRE, qui calculera, pour un polynôme donné P , le produit $(1 + d^\circ P) \times Q$ où Q est la primitive de P qui s'annule en 0 ;

. HORNER , qui calculera – selon la méthode de même nom, la valeur d'un polynôme P donné en un point a donné.

On écrira un programme permettant de tester EULER pour différentes valeurs de n .