

EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION – UN EQUIVALENT DE $\ln \frac{n!}{n^n}$ EN $+\infty$.

On a : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \ln \sqrt{x}$ et $g(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

1. a. $f(x)$ n'est calculable que ssi $x \geq 0$ (à cause de \sqrt{x}) et $\sqrt{x} > 0$ (à cause de $\ln \sqrt{x}$).

Donc l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0 : f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$.

- b. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$;

$\forall x > 0 : f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{x+1}{2x}(x-1)$ donc $\forall x > 0 : \text{signe}(f'(x)) = \text{signe}(x-1)$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$

(NB : comme $f(1) = 0$, on en déduit $f \geq 0$ et f ne s'annule qu'en 1 ; par là-même :

$\forall x > 0 : \ln x \leq (x^2 - 1)/2$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 1$).

Sachant $\lim_{0^+} \ln = -\infty$ et $\ln x = o(x^2)$: $\lim_{0^+} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$

2. a. f est dérivable donc continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable entre deux réels quelconques de $]0, +\infty[$; comme $1 \in]0, +\infty[$, on en déduit que $g(x)$ est défini pour tout $x > 0$ **CQFD**

b. $g(x) = \int_x^1 f(t) dt = -\int_1^x f(t) dt$ donc g est l'opposée de la primitive de f qui s'annule en 1.

- c. En se souvenant qu'une primitive de \ln sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto x \ln x - x$, on obtient :

$$g(x) = \int_x^1 \left[\frac{1}{4}(t^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln t \right] dt = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) - \frac{1}{2} (t \ln t - t) \right]_x^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x \ln x$$

- d. Sachant $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, on obtient $\lim_{0^+} g = 1/3$ (ceci permet d'écrire : $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$

bien que f ne soit pas définie en 0 et que même $\lim_{0^+} f = +\infty$ – on parle dans ce cas d'intégrale impropre convergente).

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et remarquons $\forall x > 0 : f(x) = (x^2 - 1 - 2 \ln x) / 4$.

a. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1 - 2 \ln \frac{k}{n} \right] = \frac{1}{4n} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \sum_{k=1}^n 1 - 2 \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} \right]$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 - n - 2 \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{n} \right] = \frac{1}{4n} \left[\frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n - 2 \ln \frac{\prod_{k=1}^n k}{n^n} \right]$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \ln \frac{n!}{n^n} \quad \text{CQFD}$$

b. $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket : \llbracket k/n, (k+1)/n \rrbracket \subset]0;1]$; or, f est décroissante sur $]0;1]$ donc :

$\forall t \in \llbracket k/n, (k+1)/n \rrbracket : f((k+1)/n) \leq f(t) \leq f(k/n)$, d'où selon les inégalités de la

moyenne, sommées suivant k : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f((k+1)/n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f(k/n)$ et

par changement d'indice et Chasles : $\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ **CQFD**

En remarquant $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (car

$f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = 0$), on trouve : $\int_{1/n}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ **CQFD**

c. $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 1 - 2 \ln \frac{1}{n} \right] / 4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n} + 2 \frac{\ln n}{n} \right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. De

plus, d'après 2d. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$. L'encadrement obtenu en b. conduit alors, par le

théorème des gendarmes, à ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{3}$.

Or, d'après a. : $\frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$; on en déduit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{12n^2} - \frac{1}{2} - 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} = -1$ **CQFD**

Alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n}\right) \right] = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\ln \frac{n!}{n^n}\right) / (-n) \right]$, d'où : $\boxed{\ln \frac{n!}{n^n} \sim -n}$.

d. L'équivalence précédente va nous fournir un contre-exemple de plus pour tordre le cou à ce vieux démon : "si $u \sim v$ alors $e^u \sim e^v$ " qui nous pousserait à poursuivre ainsi :

$\frac{n!}{n^n} \sim e^{-n}$ ie $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$. Mais d'après la formule de Stirling (cf. DST4) : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$;

or, $\sqrt{2\pi n}$ ne tend pas vers 1 donc l'équivalence $n! \sim \frac{n^n}{e^n}$ est fautive.

EXERCICE 2 : ALGORITHME DE GENERATION DES POLYNOMES D'EULER EN LANGAGE PASCAL.

On trouvera le texte page suivante.

Une précision concernant l'utilisation de la procedure INTEGRE par EULER (dans ce qui suit, f_n désigne le polynôme d'Euler de rang n) : lorsque $\text{tab}[i] = f_n$, INTEGRE calcule dans $\text{tab}[i+1]$ le polynôme $g_{n+1}(x) = (n+1)F_n(x)$ où F_n désigne la primitive de f_n qui s'annule en 0.

Si n est impair, $f_{n+1} = g_{n+1}$, mais si n est pair : $f_{n+1}(x) = g_{n+1}(x) - g_{n+1}(1/2)$ car la primitive de f_n qui s'annule en $1/2$ est égale à $F_n(x) - F_n(1/2)$; le calcul de $g_{n+1}(1/2)$ est confié à HORNER.

```

PROGRAM test_Euler; {teste la procedure EULER}

const max=50;
type polynome=array[-1..max] of real;
  liste_de_polynomes=array[0..max] of polynome;
var i,j,n:integer;tab:liste_de_polynomes;

function HORNER(P:polynome;a:real):real;{ calcule la valeur du polynôme P au point a }
var k,degre_de_P:integer;u:real;
begin
degre_de_P:=trunc(P[-1]); {trunc, car Pascal bloque les affectations du type integer:=real}
if degre_de_P<0 {on traite à part le cas du polynôme nul}
then HORNER:=0
else begin u:=P[degre_de_P];
  for k:=degre_de_P-1 downto 0 do u:=P[k]+a*u;
  HORNER:=u;
end;
end;

procedure INTEGRE(P:polynome;VAR Q:polynome);
{ calcule  $Q = (1 + d^o P) \times$  la primitive de P qui s'annule en 0 }
var i, degre_de_P:integer;
begin
degre_de_P:=trunc(P[-1]);Q[-1]:=1+degre_de_P;Q[0]:=0;
for i:=0 to degre_de_P do Q[i+1]:=P[i]/(i+1)*(1+degre_de_P);
end;

procedure EULER(n:integer;VAR tab:liste_de_polynomes);
{ Pour  $0 \leq i \leq n$ , calcule dans tab[i] le polynôme d'Euler de rang i }
var i:integer;
begin
tab[0,-1]:=0;tab[0,0]:=1;
for i:=0 to n-1 do
  begin
  INTEGRE(tab[i],tab[i+1]);
  if i mod 2 = 0 then tab[i+1,0]:= - HORNER(tab[i+1],0.5);
  {si i est pair, le polynôme d'Euler de rang i + 1 s'annule en 1/2}
end;
end;

begin
writeln; {on passe à la ligne}
writeln('rang du dernier polynôme d"Euler à générer ? ');readln(n);
EULER(n,tab);
for i:=0 to n do
  begin
  writeln; {on passe à la ligne avant d'afficher les coefficients du polynôme de rang i... }
  for j:=i downto 0 do write(tab[i,j]:5:2); { ... selon les puissances décroissantes }
end;
end.

```