NB : la rédaction ne devra pas dépasser une copie double (soit 4 pages maximum), hors représentation graphique et texte Pascal.

EXERCICE 1 : FORMES INDETERMINEES " 0^0 " ET " 1^∞ ".

1. Expliquer, à l'aide de la définition de a^b, pourquoi les formes "0^0" et "1^∞" sont a priori indéterminées.
2. Déterminer, pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$. Conclure quant à "$0^0$" et "$1^\infty$".

EXERCICE 2 : ETUDE DE FONCTION – CALCUL APPROCHE D'INTEGRALE.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=\begin{cases}|x|^x & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ et (C), la courbe d'équation $y=f(x)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la dérivabilité en 0.
   Conséquence graphique au point d'abscisse 0 de (C) ?
3. Calculer la dérivée de f et les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. On se propose d'étudier la convexité de f.
   a. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f''(x)$ a le même signe que $g(x)=\left(1+\ln|x|\right)^2+\dfrac{1}{x}$.
   b. Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, et deviner la solution de $g(x)=0$.
   c. Déduire de ce qui précède la convexité de f et une équation de la tangente (T) au point d'inflexion détecté .
   d. Tracer (C) dans un repère orthonormal, en tenant compte des éléments de l'étude et notamment les tangentes remarquables.
6. On veut calculer, en cm², l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre (C), l'axe des abscisses et les verticales d'équations $x = -1{,}5$ et $x = -0{,}5$.
   a. Hachurer sur la figure du 5.d la surface concernée.
   b. Proposer (en la justifiant) une expression de $\mathcal{A}$.
   On ne dispose pas de formules permettant de déterminer une primitive de f ; on va donc chercher une approximation de $\mathcal{A}$ par la *méthode des rectangles* (vue en informatique) et que l'on va spécialiser ici. On pose $I=\int_a^b f(t)dt$ et $\forall n\geq 1 : S_n=\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(a+i\dfrac{b-a}{n})$.
   c. Montrer que si f est positive et croissante sur $[a,b]$: $S_n\leq I\leq S_n+\dfrac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$.
   d. En déduire que S_n converge bien vers I et déterminer, pour tout $\varepsilon\geq 0$, un rang N tel que la somme S_N soit une valeur approchée de l'intégrale I à ε près par défaut.
   e. Recopier et compléter le texte en langage PASCAL ébauché en annexe de façon que FUNCTION INTEGRALE_REC calcule une valeur approchée de l'intégrale entre a et b d'une fonction f positive et croissante sur $[a,b]$, avec une précision souhaitée ε.

ANNEXE AU DM11 : texte PASCAL pour la question 6 de l'exercice 2.

NB. 1 : FUNCTION F est utilisée dans FUNCTION INTEGRALE_REC pour calculer les valeurs de la fonction *f* (on utilisera présentement la fonction *f* de l'exercice 2).

NB. 2 : FUNCTION INTEGRALE_REC est censée calculer S_N tel que défini en 6.d

```
FUNCTION F(……… ….) : ……… ; ……………………………………………………….. ;

FUNCTION INTEGRALE_REC(……………..) : ……;
Var ……. ;
BEGIN
  N := ….. ;
  h := (b-a)/N; s := …. ; x := ……. ;
  FOR  ………..  DO
    BEGIN
       ….
    END ;
  ….. := … ;
END;
```