PE1B $\boxed{\textbf{CORRIGÉ}}$ **MATHEMATIQUES - DM n° 11** **VE 04/04/2008**

$\boxed{\textbf{EXERCICE 1}}$: FORMES INDETERMINEES " 0^0 " ET " 1^∞ ".

1. <u>0^0 et 1^∞ sont a priori des formes indéterminées</u> car $\left(0^+\right)^0 = e^{0\ln(0^+)} = e^{0\times(-\infty)}$,
   $1^{\pm\infty} = e^{\pm\infty\ln 1} = e^{\pm\infty\times 0}$ et que $0\times(\pm\infty)$ sont deux formes indéterminées.

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = \left(0^+\right)^{\frac{a}{\ln(0^+)}} = \left(0^+\right)^{\frac{a}{-\infty}} = \left(0^+\right)^0$; or, $\forall x>0 : x^{\frac{a}{\ln x}} = e^{\frac{a}{\ln x}\ln x} = e^a$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a$.
   Comme e^a prend des valeurs différentes selon a, <u>"0^0" est bien une forme indéterminée</u>.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = 1^{+\infty}$; or, $\forall x>|a| : \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$ et comme $x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\dfrac{a}{x} \sim a$ alors
   $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{a}{\ln x}} = e^a$. <u>"$1^\infty$" est donc également une forme indéterminée</u>.

$\boxed{\textbf{EXERCICE 2}}$: ETUDE DE FONCTION – CALCUL APPROCHE D'INTEGRALE.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Il reste à montrer qu'elle est continue en 0, et pour cela vérifier qu'elle admet une limite en 0 égale à $f(0)$ ie 1.
   $f(x) = |x|^x = e^{x\ln|x|}$; or, $\left|x\ln|x|\right| = |x|\left|\ln|x|\right|$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$ et donc
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$ **CQFD**

2. f <u>est dérivable sur</u> $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables. Pour savoir si elle est dérivable en 0, il suffit de vérifier si $\left[f(x)-f(0)\right]/(x-0)$ admet une limite finie en 0.
   Or, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{x\ln|x|}-1}{x} \overset{(*)}{\underset{0}{\sim}} \dfrac{x\ln|x|}{x} \underset{0}{\sim} \ln|x|$ ($^{(*)}\, x\ln|x| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$), et
   $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x| = -\infty$: la limite en 0 existe mais n'est pas finie donc <u>f n'est pas dérivable en 0</u>.
   La limite est infinie, donc (C) admet une <u>tangente verticale au point d'abscisse 0</u>.

3. $\forall x\neq 0 : \boxed{f'(x)} = \left[e^{x\ln|x|}\right]' = \left(x\ln|x|\right)' e^{x\ln|x|} = \left(1\times\ln|x| + x\times\dfrac{1}{x}\right) f(x) = \boxed{\left(1+\ln|x|\right) f(x)}$.
   On remarque au passage que $f'(x)$ a le même signe que $1 + \ln|x|$ (car $f(x) = e^{x\ln|x|} > 0$).
   $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = e^{-\infty\ln|-\infty|} = e^{-\infty\ln(+\infty)} = e^{(-\infty)\times(+\infty)} = e^{-\infty} = \boxed{0}$ et donc l'axe des abscisses est asymptote à (C) en $-\infty$. Et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = e^{(+\infty)\times(+\infty)} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$.

4. f' a le même signe que $1 + \ln|x|$ qui s'annule ssi $\ln|x| = -1$ ie $|x|=1/e$ ie $x = \pm 1/e$; de plus, $x \mapsto 1+\ln|x|$ a même sens de variations que $x\mapsto |x|$ d'où le signe de $1 + \ln|x|$.

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
signe(f')		+	0	–	‖	–	0	+	
variations de f	0	↗	$e^{1/e}$	↘			$(1/e)^{1/e}$	↗	$+\infty$

5a. f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout x de $\mathbb{R}^*$:
   $f''(x) = \left[(1+\ln|x|)f(x)\right]' = \dfrac{1}{x}f(x) + (1+\ln|x|)\left[(1+\ln|x|)f(x)\right] = \left[(1+\ln|x|)^2 + \dfrac{1}{x}\right]f(x)$; or
   $f(x) > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $g(x) = \left(1+\ln|x|\right)^2 + \dfrac{1}{x}$ **CQFD**
   Et on peut déjà remarquer que $g(x) \geq 1/x$ et donc pour tout $x > 0$: $g(x) > 0$.

5b. $g'(x) = \dfrac{2x\left(1+\ln|x|\right)-1}{x^2}$ donc $g'(x)$ a le même signe que $h(x) = 2x + 2x\ln|x| - 1$.

$h'(x) = 2\ln|x| + 4$ donc h', qui a même sens de variations que $x \mapsto |x|$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$; or, elle s'annule en $-e^{-2}$ donc de positive elle devient négative et donc h admet un maximum sur $\mathbb{R}_-^*$ en $-e^{-2}$ égal à $2e^{-2} - 1 < 0$ puisque $e > 2$. Ainsi h est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ donc g' aussi d' où g strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ **CQFD**

5c. g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et s'annule en -1 donc f'', qui a le même signe que g, est strictement positive sur $]-\infty, -1[$, s'annule en -1 et devient strictement positive sur $]-1, 0[$; de plus, d'après la remarque faite en 5a. : $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi : $\boxed{f \text{ est convexe sur }]-\infty,-1] \text{ et sur }]0,+\infty[\text{ et est concave sur } [-1,0[}$ et l'annulation de f'' avec changement de signe en -1 révèle la présence d'un <u>point d'inflexion pour (C) en -1</u>.
La tangente (T) en -1 a pour équation $y - f(-1) = f'(-1)[x-(-1)]$ ie $\boxed{y = x + 2}$.
Notons qu'en 0, (C) admet une tangente verticale et f étant monotone au voisinage de 0, le point d'abscisse 0 est également un point d'inflexion.

5d. Tracé de (C) : voir le graphique en annexe 1.

6a. Hachurage de la surface : voir la figure en annexe 1.

6b. f est positive et l'unité d'aire est 2 × 2 = 4 cm² donc, en cm² : $\boxed{\mathcal{A} = 4\int_{-1,5}^{-0,5} f(t)dt}$

6c. $I = \int_a^b f(t)dt$ et $\forall n \geq 1 : S_n = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $\forall k \in [\![0, n]\!] : x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Or : $I \underset{Chasles}{\overset{rel^n de}{=}} \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$; de plus, f est croissante sur $[a,b]$ donc sur $[x_i, x_{i+1}]$ et donc

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dt \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dt$ soit $h \times f(x_i) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leq h \times f(x_{i+1})$ d'où

$h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt \leq h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$ ie $S_n \leq I \leq S_n + h \times f(x_n) - h \times f(x_0)$ et ainsi :

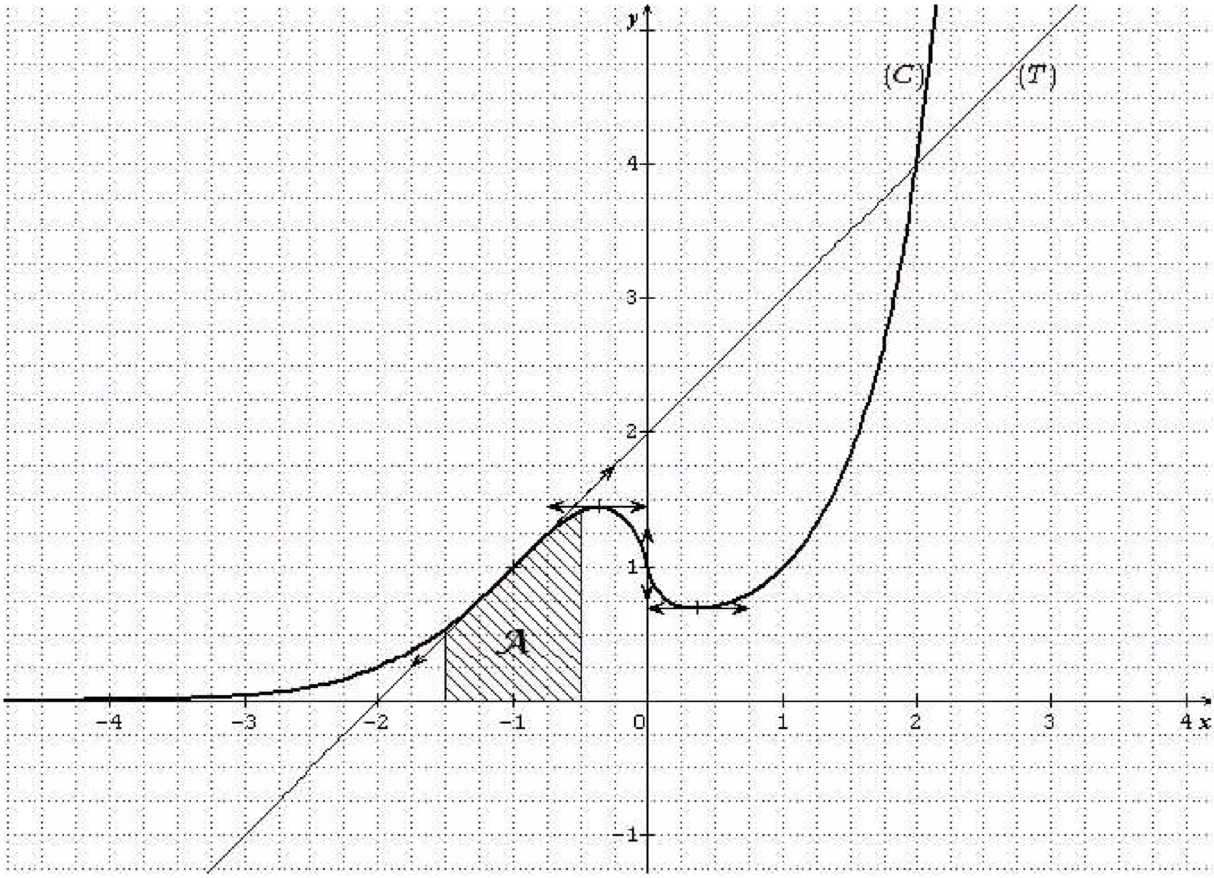
$S_n \leq I \leq S_n + \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$ **CQFD** (*NB* : l'argumentation a ignoré le signe de f).

6d. D'après 6c. : $0 \leq I - S_n \leq \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$\lim(I - S_n) = 0$ ie $\lim S_n = I$ **CQFD**. L'encadrement précédent signifie aussi que S_n est une valeur approchée de I à $\dfrac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$ près par défaut, et donc à ε près dès que $\dfrac{b-a}{n}[f(b)-f(a)] \leq \varepsilon$ ie $n \geq \dfrac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{\varepsilon}$, autrement dit à partir du rang $\boxed{N}$ $\boxed{\text{défini comme l'arrondi entier par excès de } \dfrac{(b-a)[f(b)-f(a)]}{\varepsilon}}$.

6e. Programmation : voir le texte en annexe 2.
Pour le calcul du rang N, il n'existe pas en Pascal de fonction prédéfinie calculant l'arrondi entier par excès d'un réel, d'où la FUNCTION PLAFOND créée à cet effet.

ANNEXE 1



ANNEXE 2

```
FUNCTION F(x : REAL) : REAL ; BEGIN F(x) = EXP(x*LN(ABS(x))) END ;

FUNCTION PLAFOND(x : REAL) : INTEGER ;
  BEGIN  IF (FRAC(x) = 0) OR (x<0)
           THEN PLAFOND := TRUNC(x) ELSE PLAFOND := 1 + TRUNC(x)
  END;

FUNCTION INTEGRALE_REC(a,b,eps : REAL) : REAL ;
  VAR N,i : INTEGER ; h,s,x : REAL ;
  BEGIN
    N := PLAFOND((b – a)(F(b) – F(a))/eps) ;
    h := (b-a)/N; s := 0. ; x := a ;
    FOR i := 0 TO N – 1 DO
      BEGIN
        s := s + F(x) ; x := x + h
      END ;
    INTEGRALE_REC := h*s ;
  END;
```