

NB : la rédaction ne devra pas dépasser 2 copies doubles (soit : 8 pages maximum).

EXERCICE 1 : NATURE DE LA SERIE $S(\alpha) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

On se propose ici de généraliser les deux cas étudiés dans le DST n°6 ($\alpha = 1$ et $\alpha = 2$).

1. Pour $\alpha \leq 1$, montrer, par simple comparaison avec la série $S(1)$, que $S(\alpha)$ diverge.

2. Pour $\alpha > 1$, on considère la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{1-\alpha} (\ln x)^{1-\alpha}$.

En s'inspirant de ce qui a été fait au DST n° 6, déterminer pour tout entier $n \geq 2$ un

encadrement de $\sum_{p=2}^n \frac{1}{p(\ln p)^\alpha}$ puis conclure et fournir un encadrement de $S(\alpha)$.

EXERCICE 2 : MATRICE DE PASCAL ET SON INVERSE.

Appelons *matrice de Pascal de rang n* , notée \mathcal{P}_n , la matrice carrée d'ordre $n + 1$ définie par son terme général $(\mathcal{P}_n)_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$, et avec la convention : $\binom{n}{p} = 0$ pour tout p supérieur à n .

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , \mathcal{P}_n est inversible.

On a conjecturé en classe l'allure de la matrice \mathcal{P}_n^{-1} . Voici une astuce qui vient conforter cette conjecture.

2. Soit x un réel ; on considère le vecteur colonne X_n de terme général $(X_n)_{i,1} = x^{i-1}$ (avec la convention $x^0 = 1$), et on pose $Y_n = \mathcal{P}_n X_n$.

- Exprimer le terme général de Y_n en fonction de x et du numéro de ligne de ce terme.
- A l'aide de l'astuce $x = (x+1) - 1$ et de la formule du binôme, exprimer pour tout entier k compris entre 0 et n chacun des monômes x^k comme combinaison linéaire des termes $(x+1)^p$, p compris entre 0 et n .
- En déduire une matrice Q_n telle que $X_n = Q_n Y_n$.
- Que peut-on conjecturer quant à la matrice Q_n ?

3. Valider définitivement la conjecture en calculant le produit $\mathcal{P}_n Q_n$ (*indications* : on sera éventuellement amené à utiliser – après l'avoir démontrée – la formule suivante : pour

tous naturels $a \geq b \geq c$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-c \\ a-b \end{pmatrix}$. On retrouvera également la valeur de la

somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ en prenant soin de distinguer les deux cas $n = 0$ et $n \neq 0$ du fait de la convention $0^0 = 1$, en vigueur dans les formules de dénombrement).