
$\boxed{\text{EXERCICE 1}}$: NATURE DE LA SERIE $S(\alpha)=\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ **.**

1. Si $\alpha \leq 1$ et $n \geq 3$, alors $-\alpha \geq -1$ $\ln n \geq 1$ donc $(\ln n)^{-\alpha} \geq (\ln n)^{-1}$ et $\frac{1}{n}(\ln n)^{-\alpha} \geq \frac{1}{n}(\ln n)^{-1}$.

   Or, d'après DST6 : $S(1)=+\infty$; donc, par comparaison : $\boxed{\forall \alpha \leq 1\ S(\alpha) \text{ diverge}}$ (vers $+\infty$).

2. h est dérivable sur $]1,+\infty[$, donc $\forall p \geq 2$, h est continue sur $[p, p+1]$ et dérivable sur $]p, p+1[$; de plus $h'(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ et $x \mapsto x(\ln x)^{\alpha}$ ne s'annule pas et est croissante comme produit de fonctions positives et croissantes ($x \mapsto (\ln x)^{\alpha}$ croissante car $\alpha > 1$ et ln croissante) donc h' est décroissante et donc bornée sur $[p, p+1]$: $h'(p+1) \leq h' \leq h'(p)$.
   On peut dès lors appliquer les inégalités des accroissements finis à la fonction h entre p et $p+1$: $h'(p+1) \leq h(p+1)-h(p) \leq h'(p)$ d'où :

   . $\forall n \geq 2 : \sum_{p=2}^{n}\left[h(p+1)-h(p)\right] \leq \sum_{p=2}^{n} h'(p)$ donc $h(n+1)-h(2) \leq \sum_{p=2}^{n} h'(p)$;

   . $\forall n \geq 3 : \sum_{p=2}^{n-1} h'(p+1) \leq \sum_{p=2}^{n-1}\left[h(p+1)-h(p)\right]$ donc $h'(2)+\sum_{p=2}^{n-1} h'(p+1) \leq h'(2)+\left[h(n)-h(2)\right]$

   ie $\sum_{p=2}^{n} h'(p) \leq h'(2)+\left[h(n)-h(2)\right]$, inégalité vrai aussi pour $n = 2$ ($h'(2) \leq h'(2)$).

   D'où l'encadrement final : $\forall n \geq 2 : h(n+1)-h(2) \leq \sum_{p=2}^{n} h'(p) \leq h'(2)+h(n)-h(2)$,

   Ou encore : $\boxed{\forall n \geq 2 : h(n+1)-h(2) \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p(\ln p)^{\alpha}} \leq h'(2)+h(n)-h(2)}$

   Or, $\forall \alpha > 1, \forall n \geq 2, \forall p \geq 2$: $h(n)=\frac{1}{(1-\alpha)(\ln n)^{\alpha-1}} \leq 0$ et $h'(p)=\frac{1}{p(\ln p)^{\alpha}} \geq 0$ donc $\sum_{p=2}^{n} h'(p)$ est une série à termes positifs et majorée par $h'(2)-h(2)$, donc convergente.

   Autrement dit, $\boxed{\forall \alpha > 1 : S(\alpha) \text{ est convergente}}$. De plus $\lim_{n\to+\infty}(\ln n)^{\alpha-1}=+\infty$ car $\alpha > 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} h(n)=\lim_{n\to+\infty} h(n+1)=0$, et d'après l'encadrement final : $-h(2) \leq S(\alpha) \leq h'(2)-h(2)$

   ie : $\boxed{\frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}} \leq S(\alpha) \leq \frac{1}{2(\ln 2)^{\alpha}}+\frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}}}$.

   BILAN : $\boxed{\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} \text{ converge ssi } \alpha > 1 \text{ et diverge vers } +\infty \text{ ssi } \alpha \leq 1}$.

   (*NB* : un pas supplémentaire dans la généralisation consisterait à étudier, selon les valeurs des réels α et β, la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{\beta}(\ln n)^{\alpha}}$, connue sous le nom de *série de BERTRAND*).

$\boxed{\text{EXERCICE 2}}$ **: MATRICE DE PASCAL ET SON INVERSE.**

1. $\forall j > i : j-1 > i-1$ donc $(\mathcal{P}_n)_{i,j} = 0$ et donc $\mathcal{P}_n$ est triangulaire inférieure ; ses termes diagonaux sont non nuls : $\forall i = j, i-1 = j-1$ donc $(\mathcal{P}_n)_{i,j} = 1$. Donc $\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est inversible}}$.

2a. $(Y_n)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n+1} (\mathcal{P}_n)_{i,k} (X_n)_{k,1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{i-1}{k} x^k \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} 1^{i-1-k} x^k = \boxed{(x+1)^{i-1}}$.

2b. $x^k = [(x+1)-1]^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (-1)^{k-p} (x+1)^p \overset{(*)}{=} \boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{k}{p} (-1)^{k-p} (x+1)^p}$ $\left({}^{(*)}\binom{a}{b} = 0 \text{ si } b > a \right)$

2c. Pour tous entiers k et p de $[\![0, n]\!]$: $x^k = (X_n)_{k+1,1}$ et $(x+1)^p = (Y_n)_{p+1,1}$ donc, d'après 2b et en posant $\boxed{(Q_n)_{k+1,p+1} = \binom{k}{p} (-1)^{k-p}}$: $(X_n)_{k+1,1} = \sum_{p=0}^{n} (Q_n)_{k+1,p+1} (Y_n)_{p+1,1}$ ie $\boxed{X_n = Q_n Y_n}$ avec $Q_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie ci-dessus.

2d. Par définition : $Y_n = \mathcal{P}_n X_n$; or, $\mathcal{P}_n$ est inversible donc : $X_n = \mathcal{P}_n^{-1} Y_n$. De plus, $X_n = Q_n Y_n$ d'après 2c. donc on est amené à <u>conjecturer</u> $\boxed{Q_n = \mathcal{P}_n^{-1}}$
Ce n'est qu'une conjecture car $\mathcal{P}_n^{-1} Y_n = Q_n Y_n \Rightarrow \mathcal{P}_n^{-1} Y_n - Q_n Y_n = 0 \Rightarrow (\mathcal{P}_n^{-1} - Q_n)\, Y_n = 0$, et la régle du produit nul n'est pas valide entre matrices et donc on ne peut conclure, même avec $Y_n \neq 0$, que $\mathcal{P}_n^{-1} - Q_n$ est égal à 0 ie que $\mathcal{P}_n^{-1}$ est égale à Q_n.

3. Si $a \geq b \geq c$:

$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \frac{a!}{\cancel{b}!(a-b)!} \frac{\cancel{b}!}{c!(a-c)!} = \frac{a!}{c!(a-c)!} \frac{(a-c)!}{(a-b)!(b-c)!} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{a-b} = \binom{a}{c}\binom{a-c}{b-c}$$

Sinon (ie si $b > a$ ou $c > b$, et a fortiori si c >a) : $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = 0$.

$(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} (\mathcal{P}_n)_{i,k} (Q_n)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1}$; d'après la remarque précédente,

si $j-1 > i-1$ ie $j > i$ tous les termes de la somme sont nuls donc $(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = 0$. Sinon, les termes non nuls figurent parmi ceux tels que $i-1 \geq k-1 \geq j-1$ ie $i \geq k \geq j$,d'où si $i \geq j$:

$$(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k-j} \binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1} = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k-j} \binom{i-1}{j-1}\binom{i-j}{k-j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k-j} \binom{i-j}{k-j}$$

et donc $(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=0}^{i-j} (-1)^k \binom{i-j}{k} = \binom{i-1}{j-1} [1 + (-1)]^{i-j} = \binom{i-1}{j-1} 0^{i-j}$ d'où :

. si $i = j$: $(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = (\mathcal{P}_n Q_n)_{i,i} = \binom{i-1}{i-1} \times 0^0 = 1 \times 1 = 1$

. si $i > j$: $(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = \binom{i-1}{j-1} \times 0 = 0$.

En résumé : si $i \neq j$ on a $(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = 0$ et si $i = j$ on a $(\mathcal{P}_n Q_n)_{i,j} = 1$, et donc $\mathcal{P}_n Q_n$ est la matrice identité d'où $\mathcal{P}_n$ et Q_n sont inverses l'une de l'autre ie $\mathcal{P}_n^{-1} = Q_n$ **CQFD**

BILAN : pour tout entier naturel n, la matrice de Pascal de rang n est inversible et on obtient facilement son inverse en gardant inchangés les termes de rang (i,j) tel que $i - j$ est pair et en changeant en leurs opposés les termes pour lesquels $i - j$ est impair (et on peut, si on le souhaite, remplacer $i - j$ par $i + j$ puisque $i - j$ et $i + j$ ont même parité pour tous entiers i et j).